Письма в АЖ, т. 10, № 5, 1984

УДК 524.8

ВСЕЛЕННАЯ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ И ВОЗМОЖНОСТЬ ЕЕ КВАНТОВОГО РОЖДЕНИЯ

Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ и А. А. СТАРОБИНСКИЙ

Указана возможность квантового рождения Вселенной с плоским сопутствующим пространством, обладающим нетривиальной топологией. Рассмотрен случай топологии 3-тора. Найдена относительная вероятность рождения пространственно-плоского изотропного мира с конечным объемом 3-пространства на де-ситтеровской (инфляционной) стадии при учете вакуумного тензора энергии-импульса безмассовых квантовых полей, возникающего вследствие отличия топологии пространства от тривиальной.

UNIVERSE WITH NON-TRIVIAL TOPOLOGY AND THE POSSIBILITY OF ITS QUANTUM CREATION, by Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinskij. The possibility of quantum creation of the Universe with the flat comoving 3-space possesing a non-trivial topology is suggested. The case of the 3-torus topology is considered. The relative probability is calculated of quantum creation of the spatially flat isotropic universe with the finite 3-space volume at the de Sitter (inflationary) stage taking into account the vacuum energy-momentum tensor of massless quantum fields arising due to the difference of the 3-space topology from the trivial one.

Вопрос о топологии Вселенной возник сразу же после создания общей теории относительности. Замкнутый мир с топологией S^3 сечения $t = \mathrm{const}$ является первым примером топологии, отличающейся от тривиальной топологии E^3 трехмерного бесконечного евклидового пространства. Топология S^3 закрытой модели Фридмана получается как необходимое следствие локальной изотропной кривизны пространства—времени и предположения о пространственной однородности.

Уже давно рассматривались возможности отождествления точек, приводящие к нетривиальной топологии пространственного сечения $t = \mathrm{const}$. Простейшим примером является трехмерное пространство Евклида с отождествлением $x \equiv x + L_1$, $y \equiv y + L_2$, $z \equiv z + L_3$ (3-тор). При этом Вселенная представляет собой прямоугольный параллелепипед с конечным объемом $V = L_1 L_2 L_3$. Такое отождествление оставляет пространство однородным. Однако изотропия пространства, соответствующая группе вращения O (3), нарушается. Это нарушение не ведет непосредственно (в отсутствие пространственнонеоднородных возмущений) к анизотропии температуры реликтового электромагнитного излучения. Заметим, что в случае кубической симметрии $L_1 = L_2 = L_3$ квадрупольная асимметрия исчезает.

В предшествующих работах Зельдовича (1973), Соколова и Шварцмана (1974), Соколова и Старобинского (1975) и др. исследовались фридмановские модели с различными отождествлениями точек, причем характерные длины отождествления (минимальный и максимальный параметры склейки) предполагались меньшими размера современного горизонта фридмановской модели. Рассматривались возможности наблюдения одного и того же астрономического объекта в разных участках неба, а также влияние нетривиальной топологии на спектр адиабатических возмущений и распределение галактик по небу. Поиски эффектов такого рода неизменно приводили к отрицательным результатам и ограничивали снизу минимальный размер отождествления величиной порядка нескольких сотен мегапарсек.

Вопрос о пространственной топологии Вселенной сейчас приобретает новый интерес в связи с гипотезой спонтанного квантового рождения Вселенной (Трион, 1973; Фомин, 1975; Зельдович, 1981; Грищук и Зельдович, 1982; Виленкин, 1982, 1983), которая в свою очередь реально стала на повестку дня после развития теории инфляционной (раздувающейся) Вселенной (Старобинский, 1980; Гут, 1981; Линде, 1982). В узком техническом смысле квантовым рождением Вселенной следует называть стадию, на которой классические уравнения общей теории относительности не выполняются. В частности, для масштабного фактора замкнутого мира Фридмана с заданным нулевым хиггсовским скалярным полем и потенциалом $V(0) = 3H^2/8\pi G$ (в статье принято $\hbar = c = 1$), как известно, классическое решение есть $a(t) = H^{-1} \operatorname{ch} Ht$. В случае замкнутого мира не существует другого классического решения, в котором происходило бы изменение a от 0 до минимального классического значения $a_{\min} = H^{-1}$. Этот интервал a мир, подобно частице в обычной квантовой механике, может проходить туннельным образом. Туннелирование мира под потенциальным барьером описывается квантовым геометродинамическим уравнением Уилера — Де Витта (Де Витт, 1967), которое есть аналог уравнения Шредингера для квантовой теории гравитации. При этом роль барьера в случае закрытого мира Фридмана играет пространственная кривизна.

На масштабах, бо́льших планковских ($a^2 \gg G$), уравнение Уилера — Де Витта можно решать в приближении ВКБ как в надбарьерном режиме (что соответствует классике), так и под барьером. Хорошо известно, что ВКБ-приближение в подбарьерном режиме соответствует «движению в мнимом времени $\tau = -it$». При этом вероятность прохождения барьера можно вычислить как $e^{-|S|}$, где S — действие на решении классических уравнений гравитации в евклидизированной геометрии (с заменой t на $i\tau$ в метрике). В частности, вероятность квантового рождения пустого закрытого мира де Ситтера с кривизной H оказывается пропорциональной $\exp(-\pi/GH^2)$ (мы считаем, что $GH^2 \ll 1$). Показатель экспоненты отличается знаком от результата Виленкина (1982, 1983); обсуждение этого вопроса см. в работе Старобинского (1984).

Во всех этих расчетах существенно, что мы имеем дело с замкнутым миром. Величина действия S пропорциональна объему трехмерного сечения $\tau = \mathrm{const}$. В настоящее время неясно, каков смысл «вероятности рождения замкнутого мира» и как эту вероятность нормировать. Кроме того, «рождение» мира может происходить и классически, из сингулярности. В этом случае экспоненциально малый фактор в вероятности, связанный с туннелированием, вообще отсутствует. Из этого не следует, однако, что классическое рождение является более вероятным, поскольку абсолютные значения вероятностей неизвестны.

Тем не менее очевидно, что бесконечное значение действия для плоского или открытого миров Фридмана (из-за некомпактности трехмерного пространства) приводит к нулевой вероятности (т. е. невозможности) их квантового рождения. В этой ситуации как раз и становится существенной возможность квантового рождения плоского, но топологически нетривиального мира.

При достаточно длительной ($H\Delta t \gtrsim 70$) де-ситтеровской (инфляционной) стадии экспоненциального расширения размеры ячейки периодичности такого мира сегодня окажутся больше горизонта. Наблюдательно отличить такой мир от обычного плоского мира невозможно. При равной нулю современной космологической постоянной плоский мир будет расширяться неограниченно, лишь отдельные его части могут локально коллапсировать за счет начальных возмущений.

Рассмотрим общий вид пространственно однородного мира с топологией 3-тора:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dx^2 - b^2(t)\,dy^2 - c^2(t)\,dz^2, \tag{1}$$
$$x + L \equiv x,\ y + L \equiv y,\ z + L \equiv z.$$

Трехмерный объем мира равен $abc\,L^3$. Изотропному случаю соответствует $a \propto b \propto c$. Пусть мир является пустым и эффективная космологическая постоянная, создаваемая скалярным полем или гравитационной поляризацией вакуума, $\Lambda = 3H^2 > 0$. Тогда в изотропном случае классическое решение есть $a \propto b \propto c \propto \exp(Ht)$. В отличие от случая тривиальной топологии ($L = \infty$) полученная метрика геодезически полна и не имеет горизонта частиц при $t \to -\infty$. Поверхность $t = -\infty$ несингулярна. В этом случае барьера нет, но тем не менее в определенном смысле можно говорить о квантовом рождении, поскольку эволюция метрики перестает быть квазиклассической (т. е. в квантовом уравнении Уилера — Де Витта нельзя пользоваться приближением ВКБ), когда $(aL)^3 < GH^{-1}$, и тогда классическое решение уже неприменимо.

Наличие анизотропии приводит к возникновению истинной сингулярности казнеровского типа, общее решение есть:

$$a = a_0\,(\mathrm{sh}\,3Ht)^{1/3}\left(\mathrm{th}\,\frac{3}{2}\,Ht\right)^{p_1 - 1/3},$$

$$b = b_0 (\mathrm{sh}\, 3Ht)^{1/3} \left(\mathrm{th}\, \frac{3}{2} Ht\right)^{p_2 - 1/3}, \tag{2}$$

$$c = c_0 (\mathrm{sh}\, 3Ht)^{1/3} \left(\mathrm{th}\, \frac{3}{2} Ht\right)^{p_3 - 1/3},$$

где p_1, p_2, p_3 — казнеровские индексы ($p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$). Барьера здесь также нет. Эволюция метрики вблизи сингулярности квазиклассична, если $a_0 b_0 c_0 L^3 \gg GH^{-1}$ (достаточный критерий квазиклассичности для степенных режимов имеет вид $abcL^3 \gg Gt$). Заметим, что при $t \to \infty$ метрика изотропизуется ($\dot{a}/a \simeq \dot{b}/b \simeq \dot{c}/c$), но отношения масштабов a/b, a/c, b/c остаются произвольными. Это является частным случаем общего результата, полученного в работе Старобинского (1983).

В следующем приближении надо учесть, что наличие нетривиальной топологии приводит к появлению поляризации вакуума всех квантовых полей, которая есть гравитационный аналог эффекта Казимира. Наглядно можно сказать, что спектр нулевых колебаний квантовых полей из сплошного превращается в дискретный. Эффект равен разности между суммой и интегралом в пространстве импульсов *.

В кубически-симметричном случае $a = b = c$ тензор энергии-импульса топологической поляризации вакуума безмассовых полей по соображениям симметрии и размерности пропорционален тензору энергии-импульса идеального ультрарелятивистского газа

$$T_0^0 \propto a^{-4}, \; T_1{}^1 = T_2{}^2 = T_3{}^3 = -\frac{1}{3} T_0{}^0. \tag{3}$$

Конкретный расчет для скалярного поля с естественными периодическими условиями отождествления

$$\varphi(x + L) = \varphi(x), \;\; \varphi(y + L) = \varphi(y), \;\; \varphi(z + L) = \varphi(z) \tag{4}$$

дает (Старобинский, 1976; см. также работы Мамаева и Трунова (1979), Банаха и Доукера (1979) и Де Витта и др. (1979)):

$$T_0{}^0 \simeq -0.8375\,(aL)^{-4}. \tag{5}$$

Для электромагнитного поля величина $T_0{}^0$ вдвое больше.

Результат для фермионных полей зависит от вида условий отождествления. Если принять, что фермионное поле подчиняется такому же периодическому условию (4), что и бозонные поля, то для каждой фермионной степени свободы мы получим результат (5), но с противоположным знаком. В этом случае в суперсимметричных теориях, где число фермионных и бозонных степеней свободы одинаково, суммарный тензор энергии-импульса топологической поляризации ва-

---

* Эта топологическая поляризация вакуума складывается с поляризацией вакуума всех квантовых полей, создаваемой кривизной пространства — времени. Относительная величина этих двух видов гравитационной поляризации вакуума зависит от соотношения между $(aL)^{-1}$, $(bL)^{-1}$, $(cL)^{-1}$ и $\dot{a}/a$, $\dot{b}/b$, $\dot{c}/c$ и может быть сколько угодно малой или большой.

куума обращается в нуль и мы возвращаемся к рассмотренной выше ситуации, когда барьера нет.

Если же принять более естественные для фермионных полей антипериодические условия отождествления

$$\psi(x+L) = -\psi(x),\ \psi(y+L) = -\psi(y),\ \psi(z+L) = -\psi(z) \quad (6)$$

(обсуждение преимуществ такого выбора см. в работе Форда (1980)), то, например, для двухкомпонентного нейтринного поля получаем:

$$T_0{}^0 \simeq -0.3914\,(aL)^{-4}. \quad (7)$$

Полная величина $T_0{}^0$, просуммированная по бозонным и фермионным полям, оказывается отрицательной: $T_0{}^0 = -A/(aL)^4$, $A > 0$.

Решение классических уравнений эволюции метрики (1) при $a = b = c$ с эффективной космологической постоянной и тензором энергии-импульса топологической поляризации вакуума (3) имеет вид:

$$a(t) = L^{-1}\left(\frac{8\pi GA}{3H^2}\right)^{1/4}(\mathrm{ch}\,2Ht)^{1/2} \quad (8)$$

и является несингулярным, $a(t)$ не обращается в нуль. Это указывает на существование барьера и возможность квантового рождения мира путем туннелирования через него. Отметим общую связь между наличием t-симметричных несингулярных решений классических уравнений и возможностью квантового рождения мира путем туннелирования на это решение в момент $t = 0$.

Расчет вероятности туннелирования мира из $a = 0$ в $a = a_{\min} = L^{-1}(8\pi GA/3H^2)^{1/4}$ проводится с помощью ВКБ-приближения к уравнению Уилера — Де Витта аналогично случаю рождения замкнутого мира (Старобинский, 1984). Вероятность рождения оказывается пропорциональной

$$w \propto \exp\left(-\frac{6(\pi)^{1/4}\,\Gamma(^1/_4)}{3\Gamma(^3/_4)}\left(\frac{A^3}{GH^2}\right)^{1/4}\right) = \exp\left(-2.055\left(\frac{A^3}{GH^2}\right)^{1/4}\right). \quad (9)$$

Полученный результат качественно сохраняется и при небольшом отклонении от кубической симметрии ($a \sim b \sim c$). Если же, однако, $c \ll a, b$, то структура тензора энергии топологической поляризации вакуума существенно меняется. Тогда (Де Витт и др., 1979) для скалярного и двухкомпонентного нейтринного полей имеем:

$$T_0{}^0(s=0) = -\frac{\pi^2}{90c^4L^4}, \quad T_0{}^0\left(s=\frac{1}{2}\right) = -\frac{7\pi^2}{360c^4L^4},$$

$$T_1{}^1 = T_2{}^2 = -\frac{1}{3}T_3{}^3 = T_0{}^0. \quad (10)$$

Эволюция метрики (1) с эффективной космологической постоянной и топологической поляризацией вакуума (10) начинается из классической сингулярности, где

$$a \propto b \propto t^{-1/6}, \quad c \propto t^{1/2}. \quad (11)$$

Барьера здесь нет, равно как и нарушения условия квазиклассичности, поэтому имеет место классическое «рождение» из сингулярности. Асимптотика решения при $t \to \infty$ такая же, как и у решения (2), неравенство $c \leqslant a,\ b$ при этом сохраняется. Заметим для полноты, что при $c \leqslant a,\ b$ существует и другая возможная асимптотика расширения при $t \to \infty$: $a \propto b \propto \exp(H\sqrt{2}t)$, $c = \mathrm{const}$, но она экспоненциально неустойчива. Характерное время этой неустойчивости порядка H^{-1}.

Из рассмотренных примеров видно, что эволюция пустого плоского мира с топологией 3-тора может начинаться как из классической сингулярности, так и путем квантового рождения с туннелированием или даже без него. При этом случаю квантового рождения соответствует ситуация, когда параметры отождествления по трем осям aL, bL и cL одного порядка, а выходу из классической сингулярности — когда они резко различны. Если, однако, де-ситтеровская (инфляционная) стадия расширения мира была достаточно длинной, то выяснить, какая ситуация реализуется, с помощью наблюдений невозможно. Как уже говорилось выше, в настоящее время нет также способа сравнить между собой вероятности классического и квантового рождения мира.

ЛИТЕРАТУРА

Банах и Доукер (Banach R., Dowker J. S.). J. Phys. A, 1979, *12*, 2545.
Виленкин (Vilenkin A.). Phys. Letters, 1982, *117B*, 25.
Виленкин (Vilenkin A.). Phys. Rev. D, 1983, *27*, 2848.
Грищук Л. П. и Зельдович Я. Б. В кн.: Квантовая гравитация. Тр. 2-го сем. «Квантовая теория гравитации» (Москва, 13—15 октября 1981 г.). М.: Ин-т ядерных исслед. АН СССР, 1982, с. 39.
Гут (Guth A. H.). Phys. Rev. D, 1981, *23*, 347.
Де Витт (De Witt B. S.). Phys. Rev. D, 1967, *160*, 1113.
Де Витт и др. (De Witt B. S., Hart C. F., Isham C. J.). Physica, 1979, *96A*, 197.
Зельдович Я. Б. Comments Astrophys. and Space Phys., 1973, *5*, 169.
Зельдович Я. Б. Письма в АЖ, 1981, *7*, 579.
Линде А. Д. Phys. Letters, 1982, *108B*, 389.
Мамаев С. Г. и Трунов Н. Н. Теор. и мат. физ., 1979, *38*, 345; Изв. вузов. Физика, 1979, № 9, 71.
Соколов Д. Д. и Старобинский А. А. Астрон. журн., 1975, *52*, 1041.
Соколов Д. Д. и Шварцман В. Ф. Ж. эксперим. и теор. физ., 1974, *66*, 412.
Старобинский А. А. В кн.: Классическая и квантовая теория гравитации. Тез. докл. IV Всес. гравитационной конф. (Минск, 1—3 июля 1976 г.). Минск: Ин-т физики АН БССР, 1976, с. 110.
Старобинский А. А. Phys. Letters, 1980, *91B*, 99.
Старобинский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1983, *37*, 55.
Старобинский А. А. Письма в ЖЭТФ, 1984 (в печати).
Трион (Tryon E. P.). Nature, 1973, *246*, 396.
Фомин П. И. Докл. АН УССР, 1975, № 9, 831.
Форд (Ford L. H.). Phys. Rev. D, 1980, *21*, 933.

Ин-т теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР, Москва

Поступила в редакцию
15 февраля 1984 г.