Письма в АЖ, т. 9, № 4, 1983

УДК 524.8

ТЕОРИЯ ПРОТЕКАНИЯ И ЯЧЕИСТО-СЕТЧАТАЯ СТРУКТУРА ВСЕЛЕННОЙ

С. Ф. ШАНДАРИН

Предлагается количественный метод, позволяющий установить, какой тип структуры (ячеисто-сетчатая структура или изолированные аморфные сгущения галактик) присущ пространственному распределению галактик. Предлагаемый метод основан на идеях теории протекания. Приведены первые результаты применения рассматриваемого метода к каталогам четырех типов, один из которых наблюдательный, а три других модельные.

PERCOLATION THEORY AND CELLULAR STRUCTURE OF THE UNIVERSE, by S. F. Shandarin. A quantative method is proposed to find out the type of the structure (cellular structure or isolated clusters) describing the spatial distribution of galaxies. The method is based on the ideas of the percolation theory. First results of application of the proposed method to four different types of catalogues are given. One of these catalogues is observational and three others are models.

В последнее время как наблюдатели, так и теоретики все определеннее говорят о ячеистой или сетчатой крупномасштабной структуре Вселенной (Йыэвээр и др., 1978; см. также обзоры: Оорт, 1982; Шандарин и др., 1983). Галактики в сильной степени концентрируются в цепочки и сравнительно тонкие слои, образуя вытянутые и сплюснутые сверхскопления. Многие сверхскопления, по-видимому, смыкаются друг с другом, образуя единую ячеисто-сетчатую структуру. Пространство между сверхскоплениями практически свободно от галактик — это так называемые «черные области». Характерные размеры объектов, о которых идет речь, достигают 100 Мпс. Считается, что в бо́льших масштабах галактики распределены практически однородно.

Обсуждения ячеисто-сетчатой структуры обычно носят качественный характер, выводы часто основываются просто на зрительном восприятии картины распределения галактик. По существу первая попытка выработать количественные характеристики геометрической структуры распределения галактик выявила чрезвычайную сложность этой задачи (Губерман и др., 1981). В работе Зельдовича (1982) была поставлена задача о топологии структуры в целом, и было показано, что в адиабатическом сценарии часть пространства, где плотность повышена, представляет собой единую связную область, изолирующую отдельные пустые области.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы сформулировать объективные количественные критерии самого факта существования или отсутствия ячеисто-сетчатой структуры. Проблема определения параметров структуры, таких, как, например, характерный размер ячейки, будет обсуждена отдельно.

Наиболее распространенными в настоящее время объективными характеристиками пространственного распределения галактик являются корреляционные функции, которые несут в себе много полезной информации о крупномасштабной структуре Вселенной (Пиблс, 1980). Оказалось, однако, что корреляционные функции малочувствительны как к формам отдельных областей повышенной плотности галактик, так и к топологии структуры в целом. Например, с помощью простой и, наверное, поэтому самой популярной среди исследователей двухточечной корреляционной функции, в принципе, невозможно отличить компактные структуры от сильно вытянутых или сплюснутых. Вычисления многоточечных корреляционных функций весьма громоздки, а результаты неясны.

Предлагаемый метод основывается на идеях и методах теории протекания *, которая в настоящее время широко применяется во многих разделах современной физики: в теории полупроводников, в теории ферромагнетизма и т. д. (Эфрос, 1982).

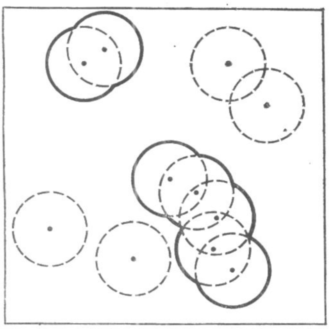

Рис. 1. Способ объединения частиц в кластеры. Частицы, лежащие внутри сплошного контура, образуют кластер. Окружности, описанные вокруг частиц, показаны штриховыми линиями

Рассмотрим одну из задач теории протекания, которая послужит в дальнейшем основой предлагаемого метода.

Рассмотрим квадратную область размером L, в которой распределены частицы с постоянной средней плотностью $\bar{n}$. Опишем вокруг каждой частицы, как вокруг центра, окружность радиуса r. Две частицы будем считать связанными, если одна лежит внутри окружности, описанной вокруг другой; если частица не лежит внутри окружности, описанной вокруг другой частицы, но обе они лежат внутри окружности, описанной вокруг третьей, то все три частицы также считаются связанными и т. д. Все связанные между собой частицы образуют кластер. Таким образом, каждый кластер состоит либо из одной, либо из нескольких частиц, таких, что у каждой из них есть по крайней мере одна соседняя частица, расположенная не далее чем на расстоянии r.

Связанные по описанному правилу окружности называются охватывающими, а объединение частиц в один кластер означает, что между любыми частицами, принадлежащими одному кластеру, существует «путь», проходящий по системе охватывающих окружностей (рис. 1).

Пока радиус окружностей мал, число кластеров велико и почти каждый кластер состоит из одной частицы. По мере роста r число кластеров уменьшается, а их размеры растут. При некотором критическом значении $r = r_c$ возникает кластер, соединяющий противоположные стороны квадрата. По терминологии теории протекания в рассматриваемой области возникает «протекание» по системе охватывающих окружностей.

Критический радиус протекания является случайной величиной, которая несколько меняется при переходе от одной реализации распределения частиц к другой. Если при постоянной средней плотности частиц $\bar{n}$, а также при неизменных других статистических параметрах системы, увеличивать размеры области L, то среднее значение критического радиуса протекания будет несколько меняться, а дисперсия уменьшаться. Чем больше область, тем меньше условия протекания зависят от реализации. В предельном случае бесконечно большой области условия возникновения протекания не зависят от реализации. Как известно, при пуассоновском распределении частиц протекание наступает, когда выполняется следующее условие (см., например, Эфрос, 1982 г.):

$$B_c = B_P \approx 4.1 \pm 0.4, \quad B_c = \bar{n}\pi r_c^2. \tag{1}$$

Безразмерный параметр B, от которого зависит протекание через систему, равен среднему числу частиц, находящихся внутри одной окружности.

* Теория протекания также известна под названием теории перколяции.

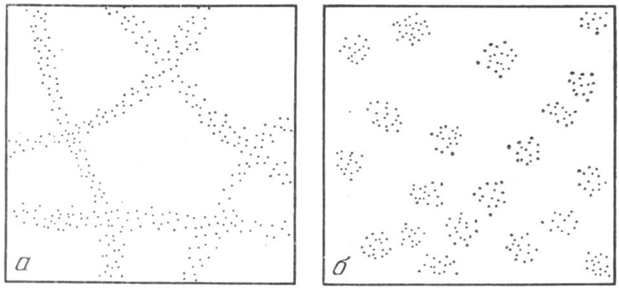

Рис. 2. Схематическое изображение двух различных типов распределения частиц: *а* — ячеистая структура, *б* — изолированные кластеры

Вернемся теперь к проблеме ячеистой структуры. Интуитивно ясно, что если бы частицы располагались не случайно, а с некоторой тенденцией к образованию ячеистой структуры, т. е. концентрировались к некоторым пересекающимся линиям, то протекание возникло бы прежде всего вдоль этих линий при меньших значениях r, а значит, при меньшем значении параметра протекания B. Напротив, если бы частицы концентрировались к компактным изолированным сгущениям, то протекание возникло бы при большем значении параметра B. Сделаем простейшие оценки, иллюстрирующие эти утверждения.

Пусть все частицы располагаются в M узких пересекающихся полосах, случайно расположенных в квадратной области размером L (рис. 2, *а*). Длина полос примерно равна размеру области L, а ширина d должна быть по крайней мере в несколько раз меньше, чем L/M, что по порядку величины равно среднему расстоянию между ближайшими пересечениями полос. Легко найти выражение для средней плотности частиц внутри полос $\bar{n}_{st}$

$$\bar{n}_{st} = \frac{\bar{n}L^2}{MLd} = \bar{n}\frac{L}{Md} > \bar{n},$$

где $\bar{n}$ — по-прежнему, средняя плотность частиц во всей области. Ясно, что протекание возникнет вдоль полос, когда $\bar{n}_{st}\pi r_1{}^2 = \bar{n}\,\dfrac{L}{Md}\,\pi r_1{}^2 = B_P$. Параметр протекания, рассчитанный по средней плотности $\bar{n}$ оказывается, как и ожидалось, меньше, чем при случайном распределении частиц:

$$B_{st} = \bar{n}\pi r_1{}^2 = B_P\,\frac{Md}{L} < B_P.$$

Пусть теперь все частицы собраны в компактные группы, случайно распределенные в рассматриваемой области (рис. 2, *б*). Среднее число групп, приходящихся на единицу площади, равно $\bar{n}_{cl} < \bar{n}$. Условие протекания теперь определяется плотностью групп: $\bar{n}_{cl}\,\pi r_2{}^2 = B_P$. В рассматриваемом случае параметр протекания, рассчитанный по средней плотности $\bar{n}$, оказывается больше, чем при чисто случайном распределении частиц:

$$B_{cl} = \bar{n}\pi r_2{}^2 = B_P\,\frac{\bar{n}}{\bar{n}_{cl}} > B_P.$$

Таким образом, по величине параметра протекания B можно судить о наличии или отсутствии ячеистой структуры в системе, состоящей из одинаковых частиц: если $B_c < B_P$, то ячеистая структура присутствует, а если $B_c > B_P$, то ячеистой структуры нет, более того, это означает, что в распределении частиц преобладают компактные группы.

До этого момента обсуждались двумерные распределения частиц. Однако задача легко формулируется и в случае трехмерной геометрии.

Нужно лишь окружности заменить сферами. При этом известно, что величина параметра протекания, который теперь определяется как среднее число частиц внутри сферы, для пуассоновского распределения частиц уменьшается до величины

$$B_c = B_P^{(3)} = 2.7 \pm 0.1, \quad B_c = \bar{n} \cdot \frac{4}{3} r_c{}^3. \tag{2}$$

Предлагаемая методика была применена к пяти трехмерным каталогам: четырем модельным и одному наблюдательному. При этом параметр протекания оценивался по условию протекания в реальном трехмерном пространстве.

Среди модельных каталогов один был «случайный», один — «адиабатический» и два — «иерархических». «Случайный» каталог состоял из частиц, координаты которых задавались случайными числами, равномерно распределенными в интервале от 0 до L, где L — размер области. «Адиабатический» каталог содержал частицы, координаты которых были рассчитаны путем численного моделирования процесса гравитационной неустойчивости с начальными условиями адиабатического типа (подробное описание численной модели см. в работе Клыпина и Шандарина (1981)). Два «иерархических» каталога были получены по «рецепту» Сонейры и Пиблса (1978); при этом прямого интегрирования движения частиц не проводилось, но получающиеся распределения частиц, по мнению авторов этого метода, похожи на картину ликских подсчетов и обладают корреляционными свойствами, близкими к наблюдаемым. Отметим, кстати, что двухточечная корреляционная функция, рассчитанная по «адиабатическому» каталогу, также близка к наблюдаемой (Клыпин и Шандарин, 1981).

Наблюдательный каталог, составленный Хукра, содержал угловые координаты и красные смещения галактик, расположенных в кубе со стороной 80 Мпс (при постоянной Хаббла $H_0 = 50$ км/см·Мпс) и центром в окрестности скопления Девы. Более подробное описание этого каталога приведено в работах Эйнасто и др. (1983) и Зельдовича и др. (1982).

Параметры всех каталогов собраны в таблице. Отметим, что все модельные каталоги охватывали область такую же, как и реальный каталог, т. е. куб со стороной 80 Мпс. Во втором и третьем столбцах таблицы приведены полное число объектов в каталоге и средняя плотность в единицах Мпс$^{-3}$. Поскольку задача протекания непосредственно не решалась, то для расчета параметров протекания, приведенных в таблице, были использованы результаты близкой к ней другой задачи. В работах Эйнасто и др. (1983), Зельдовича и др. (1982) изучался среди прочих вопрос о длине наибольшего кластера при разных значениях радиуса сфер, с помощью которых проводилось объединение частиц в кластеры. По-видимому, не будет большой ошибкой считать, что протекание возникнет примерно тогда, когда длина наибольшего кластера достигнет размера области $l_{max} = L = 80$ Мпс. Значения радиусов сфер и параметров протекания при $L = 80$ Мпс даны в четвертом и пятом столбцах таблицы. В шестом и седьмом столбцах для сравнения приведены также значения радиусов сфер и параметров протекания, когда длина наибольшего кластера превосходит сторону куба, ограничивающего область каталогов: $l_{max} =$

Тип каталога	N	$10^3\,\dot{n}$	$l_{max} = L = 80$ Мпс		$l_{max} = 100$ Мпс$>L$	
			r_c, Мпс	B_c	r_c Мпс	B_c
Наблюдательный	866	1.7	4.75	0.76	5.58	1.23
«Адиабатический»	753	1.5	4.75	0.67	5.2	0.88
«Случайный»	850	1.7	7.54	3.05	8.2	3.92
«Иерархический»	819	1.6	r=10 Мпс	$>$6.7	–	–
	860	1.7	(l_{max}=60$<L$)	$>$7.1	–	–

$= 100$ Мпс $> L$. В упомянутых выше работах длина кластеров исследовалась лишь для радиусов, не превосходящих 10 Мпс, при этом ни в одном из двух «иерархических» каталогов длина наибольшего кластера не достигла величины стороны куба. По этой причине для «иерархических» каталогов можно дать лишь нижнюю оценку параметра протекания, которая и приведена в таблице.

Из таблицы видно, что как в случае «адиабатического», так и наблюдательного каталогов параметр протекания заметно меньше, чем для «случайного» каталога. Напротив, параметр протекания, рассчитанный для «иерархического» каталога, заведомо больше, чем для «случайного». С одной стороны, это определенно свидетельствует в пользу существования крупномасштабной структуры Вселенной, для которой характерны длинные цепочки галактик, а с другой — в пользу предпочтительности начальных условий адиабатического типа, а значит, и адиабатического сценария образования структуры в целом.

В трехмерной геометрии наряду с нитевидными структурами возможно существование поверхностей. Протекание дает информацию прежде всего о нитевидных структурах; вопрос о существовании поверхностей повышенной плотности галактик остается пока нерешенным. Возможным подходом к его решению может быть исследование протекания по «черным областям». Если «черные области» действительно отделены друг от друга стенками, где повышена концентрация галактик, то протекание по «черным областям» будет затруднено.

Возвращаясь к таблице, следует отметить, что распределения частиц в четырех из пяти каталогов обладают близкими двухточечными функциями; в пятом — «случайном» — каталоге двухточечная корреляционная функция с точностью до шума равна нулю (Эйнасто и др., 1983; Зельдович и др., 1982).

Предлагаемый критерий существования сетчатой структуры по своей сути является статистическим и предполагает, что исследуемая область пространства по статистическим свойствам не отличается от любой другой, равной ей по объему. Выполняется ли это условие для рассматриваемых каталогов, пока не ясно. Для проверки условия статистической представительности требуется прежде всего существенно увеличить объем наблюдательного каталога.

В заключение отметим, что задача протекания также формулируется на правильной сетке и, следовательно, предлагаемый метод можно использовать для каталогов подсчетов галактик.

Автор благодарит Я. А. Эйнасто, А. А. Клыпина, Е. Саара и особенно Я. Б. Зельдовича за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

Губерман Ш. А., Дорошкевич А. Г., Коток Э. В. и Шандарин С. Ф. Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, № 42.

Зельдович Я. Б. Письма в АЖ, 1982, *8*, 195.

Зельдович и др. (Zeldovich Ya. B., Einasto J., Shandarin S. F.). Nature, 1982, *300*, 407.

Йыэвээр и др. (Joeveer M., Einasto J., Tago E.). Monthly Not. Roy Astron. Soc., 1978, *185*, 357.

Клыпин А. А. и Шандарин С. Ф. Препринт Ин-та прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981, № 136.

Оорт (Oort J. H.), Preprint Sterrewacht-Huygens Laboratorium. Leiden, 1981; Annual Rev. Astron. and Astrophys., 1983 (in press).

Пиблс (Peebles P. J. E.). The Large Scale Structure of the Universe, Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.

Сонейра и Пиблс (Soneira R. M., Peebles P. J. E.). Astron. J., 1978, *83*, 845.

Шандарин С. Ф., Дорошкевич А. Г. и Зельдович Я. Б. Усп. физ. наук, 1983, *139*, 83.

Эйнасто и др. (Einasto J., Klypin A. A., Saar E., Shandarin S. F.). Preprint Tartu Astron. Observ., 1983, A2.

Эфрос А. Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука, 1982.

Ин-т прикладной математики
им. М. В. Келдыша АН СССР, Москва

Поступила в редакцию
12 августа 1982 г.