Письма в АЖ, т. 7, № 2, 1981

УДК 524.8

МОЖЕТ ЛИ ЭФФЕКТИВНАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ СТАТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ?

А. А. СТАРОБИНСКИЙ

Обсуждается недавно выдвинутая гипотеза о том, что при наличии скалярного поля Хиггса эффективная гравитационная постоянная может изменить свой знак на ранних стадиях эволюции Вселенной. Обнаружен и исследован новый эффект, состоящий в неограниченном усилении анизотропии и неоднородности гравитационного поля при приближении величины конформного скалярного поля (в том числе поля Хиггса) к некоторому определенному конечному значению. В результате этого эволюция космологической модели протекает таким образом, что эффективная гравитационная постоянная всегда остается положительной. Рассмотрен также вопрос о возможности спонтанного нарушения симметрии в результате взаимодействия с анизотропной частью гравитационного поля. Показано (без учета радиационных поправок), что в однородных космологических моделях такой эффект отсутствует.

CAN THE EFFECTIVE GRAVITATIONAL CONSTANT BECOME NEGATIVE? by A. A. Starobinskij. A recently proposed hypothesis that, with the Higgs scalar field being present, the effective gravitational constant may change sign in the early Universe, is discussed. It is found that a new effect exists: anisotropy and inhomogeneity of a gravitational field grow unlimitedly when the magnitude of a conformal scalar field (in particular, the Higgs field) approaches some definite finite value. As a result, a cosmological model evolves in such a way that the effective gravitational constant always remains positive until a singularity is reached. Also discussed is a possibility of the spontaneous symmetry breaking due to the interaction of the scalar field with the anisotropic part of a gravitational field. It is shown that such an effect is absent in homogeneous cosmological models (radiation corrections were not taken into account).

Во многих современных теориях элементарных частиц предполагается, что частицы приобретают массу посредством механизма Хиггса и, следовательно, постулируется существование одно- или многокомпонентного скалярного поля, имеющего ненулевое классическое среднее значение вида $\rho = \langle 0 \mid \varphi \mid 0 \rangle$. В космологических моделях величина ρ зависит от плотности, температуры и времени [1, 2].

С другой стороны, различные соображения (в частности, условие малости следа T_i^i по сравнению с диагональными компонентами тензора энергии-импульса скалярного поля T_i^k при высоких энергиях) указывают на то, что скалярное поле должно обладать свойством конформной ковариантности при $\mu = 0$. Этого можно достичь, согласно Пенроузу [3] и Черникову и Тагирову [4], введя в плотность лагранжиана поля слагаемое $\frac{R}{6}\varphi^+\varphi$, где R — скалярная кривизна, что в свою очередь приводит к появлению дополнительного слагаемого в T_i^k вида

$$\frac{1}{3}\left(R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R + \delta_i^k \Box - \nabla_i \nabla^k\right)\varphi^+\varphi, \tag{1}$$

где $\Box = g^{lm}\nabla_l\nabla_m$, ∇ — ковариантная производная *. Такое скалярное поле мы будем называть конформным. Первые два слагаемых в (1) имеют такую же структуру, что и левая часть уравнений Эйнштейна:

$$R_i{}^k - \frac{1}{2}\delta_i{}^k R = 8\pi G(T_i{}^k + \tilde{T}_i{}^k), \tag{2}$$

где $\tilde{T}_i{}^k$ — тензор энергии-импульса остальных полей, кроме скалярного и гравитационного **. Поэтому можно проделать следующую процедуру: перенести эти два слагаемых из правой части (2) в левую, поделить обе части получившегося уравнения на $1 - \frac{8\pi G}{3}\varphi^+\varphi$ и назвать величину $\tilde{G} = G\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\varphi^+\varphi\right)^{-1}$ эффективной гравитационной постоянной.

Недавно Линде [6] выдвинул гипотезу о том, что на ранней (но уже классической) стадии эволюции однородной изотропной Вселенной величина $|\rho|$ могла стать больше $\rho_0 \equiv \sqrt{3/8\,\pi G}$; при этом $\tilde{G} < 0$. Изменение знака $\tilde{G}$ привело бы к далеко идущим последствиям.

Мы покажем, что это, однако, не имеет места: в реальной космологической модели величина $|\rho|$ не может перейти через критическое значение ρ_0 (по крайней мере до тех пор, пока гравитацию можно считать классической, т. е. пока $I \equiv |R_{iklm}R^{iklm}| \ll \tilde{G}^{-2}$) ***. Это происходит потому, что при $|\rho| \to \rho_0$ (как снизу, так и сверху) величина $|\tilde{G}| \to \infty$, в результате чего фридмановская модель со скалярным полем оказывается абсолютно неустойчивой в этой (регулярной) точке ****: любое сколь угодно малое возмущение — отклонение от изотропии и однородности — становится бесконечным (в линейном приближении) при $|\rho| = \rho_0$. Из приведенного ниже решения, включающего в себя нелинейную стадию, когда возмущения не малы, следует, что при $|\rho| \to \rho_0$ инвариант результирующей метрики $I \to \infty$. Этот результат не изменится при учете квантовых (но не квантово-гравитационных) флуктуаций скалярного поля, так как вблизи сингулярности скалярное поле эффективно оказывается свободным. Таким образом, два мира с $\tilde{G} > 0$ и $\tilde{G} < 0$ (если второй из них вообще существует) отделены друг от друга областями с кривизной порядка планковской (точнее говоря, $|C_{iklm}C^{iklm}| \gtrsim \tilde{G}^{-2}$).

Заметим, что эффект неустойчивости метрик с конформным скалярным полем при $|\rho| \to \rho_0$ был отмечен Бронниковым и Киреевым [7] в другой ситуации: при анализе устойчивости статической черной дыры со скалярным зарядом относительно малых возмущений в линейном приближении.

Возьмем для определенности конкретную модель с хиггсовым скалярным полем и абелевым калибровочным векторным полем, рассмотренную в космологической ситуации Криве и др. [2], с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik} + g^{ik}(D_i\varphi)^+ D_k\varphi + \frac{R}{6}\varphi^+\varphi - U(\varphi^+\varphi) + \\ + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^k\tilde{D}_k\psi - \bar{\psi}\tilde{D}_k{}^+\gamma^k\psi), \tag{3}$$

$$U(\varphi^+\varphi) = -\mu^2\varphi^+\varphi + \frac{\lambda}{2}(\varphi^+\varphi)^2 + \frac{\mu^4}{2\lambda}, \quad \lambda \ll 1, \quad e \ll 1,$$

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i,\ D_k = \partial_k + ieA_k,\ \tilde{D}_k = \tilde{\nabla}_k + ieA_k,$$

---

* При $R_{iklm} = 0$ полученный $T_i{}^k$ есть не что иное, как так называемый «улучшенный тензор энергии-импульса» скалярного поля, введенный Калланом и др. [5].

** В статье принято $\hbar = c = 1$.

*** Для действительного скалярного поля (в том числе многокомпонентного) критической является величина $\varphi^2 = 3/4\pi G$ или $\Phi_a\Phi^a = 3/4\pi G$.

**** Термин «абсолютная неустойчивость» употреблен здесь, чтобы подчеркнуть отличие обсуждаемого эффекта от гравитационной неустойчивости модели Фридмана. В последнем случае малые возмущения метрики расходятся только асимптотически при $t \to 0$ или $t \to \infty$, а при любом конечном $t \neq 0$ и $a \neq 0$ они конечны.

где $\tilde{\nabla}$ — ковариантная производная спинора. Пусть

$$\langle\varphi\rangle = \rho(t),\ \langle A^0\rangle = A^0(t),\ \langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle = n(t). \tag{4}$$

Тогда имеем (величину ρ считаем действительной):

$$A^0 = n/2e\rho^2,\ \frac{d}{dt}(\sqrt{-g}\, n) = 0,$$
$$\Box\rho - \left(\frac{R}{6} + \mu^2\right)\rho + \lambda\rho^3 = n^2/4\rho^3. \tag{5}$$

Фермионы (нейтрино) предполагаются свободными (решение практически не изменится в обратном случае, когда фермионы являются взаимодействующими и описываются уравнением состояния $p = \varepsilon/3$).

Рассмотрим вначале возмущения с бесконечной длиной волны, т. е. будем искать решение уравнений (2) в классе однородных анизотропных метрик:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\sum_{\beta=1}^{3} g_\beta{}^2(t)(dx^\beta)^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - \sum_{\beta=1}^{3} g_\beta{}^2(\eta)(dx^\beta)^2\right), \tag{6}$$
$$g_1 g_2 g_3 = 1.$$

Возьмем функцию распределения нейтрино в виде $N(\mathbf{k}) = \theta(k_0{}^2 - \mathbf{k}^2)$, где $\mathbf{k}$ — постоянный ковариантный импульс; тогда $n = k_0{}^3/6\pi^2 a^3$. Частное изотропное решение [2] есть

$$g_\beta = 1,\ \ \chi \equiv a\rho = k_0/(144\,\pi^4\lambda)^{1/6} = \chi_0, \tag{7}$$
$$a = a_0\eta = \sqrt{2a_0 t},\quad a_0{}^2 = \frac{Gk_0{}^4}{3\pi}\left[1 + \left(\frac{\lambda}{12\pi^2}\right)^{1/3}\right].$$

Плотность энергии скалярного поля положительна и $\sim \lambda^{1/3}$ от плотности энергии нейтрино. Величина $\rho = \rho_0$ при $\eta = \eta_0 = \chi_0/a_0\rho_0$, $t = t_0 = G^{1/2}\lambda^{-1/3}\pi^{1/6}2^{2/3}3^{-7/6} \approx 0{,}533\ \ G^{1/2}\lambda^{-1/3}$.

Пусть теперь $g_\beta \neq 1$ и при $t \sim 2t_0$ анизотропия еще мала. При $\tau \ll \delta^{1/2}\left(\text{где } \tau \equiv \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}\right)$ решение уравнений (2) есть

$$a = a_0\eta_0\tau^\delta(1 + \tau),\ \rho = \rho_0(1 - \tau^{1-2\delta}), \tag{8}$$
$$g_\beta = \tau^{C_\beta},\ \sum_{\beta=1}^{3} C_\beta = 0,\quad \delta = \frac{1}{6}\sum_{\beta=1}^{3} C_\beta{}^2 \ll 1,$$
$$\varepsilon_\nu \propto \tau^{-(C_{\max}+4\delta)},\quad \varepsilon_{sc} = \frac{3}{32\pi G t_0{}^2}\left[\left(\frac{\lambda}{12\pi^2}\right)^{1/3} - \delta\tau^{-2(1+\delta)}\right].$$

При $\tau \gg \exp\ (-\delta^{-1})$ решение (8) гладко переходит в (7).

Вследствие наличия горизонта частиц в (8) введение неоднородностей с длиной волны большей горизонта не изменит вида решения. При комплексном ρ асимптотика общего решения вблизи истинной сингулярности, расположенной на пространственно-подобной гиперповерхности $t = 0$, имеет вид*

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$
$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1}l_\alpha l_\beta + t^{2p_2}m_\alpha m_\beta + t^{2p_3}n_\alpha n_\beta,$$
$$\rho = \rho_0\ \exp(i\varphi_0) - t^{1-s}\varphi_1, \tag{9}$$
$$\varepsilon_{sc} = -s(1 - s)/8\pi G t^2 < 0,$$

где p_α, l_α, m_α, n_α, φ_0 — действительные, а φ_1 — комплексная функция трех пространственных переменных x^α; $s = \sum_{\beta=1}^{3} p_\beta$. На показатели p_β нало-

* Эта асимптотика может быть получена из асимптотики общего решения с неконформным скалярным полем [8] с помощью конформного преобразования.

жено одно уравнение и неравенства (предположим для определенности, что $p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$):

$$\sum_{\beta=1}^{3} p_\beta{}^2 = 2s - s^2;$$
$$0 < s < 1,\ 1 + p_1 > p_2 + p_3,\ 1 + p_1 + p_2 > p_3. \tag{10}$$

Кроме того, имеются три уравнения, связывающие **l**, **m**, **n** с ∇p_β, φ_0, φ_1. Асимптотика (9) зависит от восьми физических произвольных действительных функций и является общей. Она не разрушается веществом с уравнением состояния $p = k\varepsilon$, $0 \leqslant k < 1$, свободными частицами и классическими янг-миллсовскими полями. Показатели p_β могут изменяться в пределах:

$$-\frac{1+2\sqrt{3}}{11} \approx -0{,}406 < p_1 < 0;$$
$$-\frac{2}{11} \approx -0{,}182 < p_2 < \frac{5-\sqrt{3}}{11} \approx 0{,}297;$$
$$0 < p_3 < \frac{2}{3}$$

(при этом $0 < s < {}^1/_3$).

Этот же механизм приводит к абсолютной неустойчивости несингулярных изотропных метрик с конформным скалярным полем, построенных Бекенштейном [9], Грибом и др. [10, 11], Мельниковым [12], Мельниковым и Орловым [13] (заметим, что для неконформного скалярного поля такой эффект не возникает). В частности, модель Гриба—Мостепаненко — Фролова — Мельникова — Орлова (ГМФМО) представляет собой самосогласованную открытую модель Фридмана, заполненную однородным конформным безмассовым скалярным полем с самодействием $\lambda\,|\,\varphi\,|^4$. В этой модели спонтанное нарушение симметрии, т. е. возникновение $\rho = \langle\varphi\rangle \neq 0$, происходит за счет взаимодействия скалярного поля с пространственной кривизной.

Чтобы иметь возможность ввести какую-либо анизотропную степень свободы гравитационного поля, рассмотрим, к примеру, более общую однородную метрику, принадлежащую к V типу Бианки:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,dx^2 - b^2(t)\,e^{2x} \times (g^2(t)\,dy^2 + g^{-2}(t)dz^2). \tag{11}$$

Из уравнений Эйнштейна следует, что $a = b$, $\dot{g}/g = Ca^{-3}\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\,|\,\rho\,|^2\right)^{-1}$, $C = \mathrm{const}$. При $C = 0$ получаем решение ГМФМО*:

$$\chi \equiv a\rho = \lambda^{-1/2}, \quad a = a_{\min}\,\mathrm{ch}\,\eta = \sqrt{a_{\min}^2 + t^2},$$
$$a_{\min}^2 = \frac{4\pi G}{3\lambda}. \tag{12}$$

Величина $\rho = \rho_0$ при $\eta = \eta_0 = \mathrm{arc\,sh}\ 1$, $t = t_0 = a_{\min}$, при этом $a = a_{\min}\sqrt{2}$. Если же $C \neq 0$, то при $\delta = C^2/24\,a_{\min}^4 \ll 1$ и $\Delta\eta = \eta - \eta_0 \ll \delta^{1/2}$ решение есть:

$$a = a_{\min}\sqrt{2}\,(\Delta\eta)^\delta\left(1 + \frac{\Delta\eta}{\sqrt{2}}\right),$$
$$\rho = \rho_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Delta\eta)^{1-2\delta}\right], \tag{13}$$
$$g = g_0\,(\Delta\eta)^{\sqrt{3\delta}}, \quad \varepsilon_{sc} = -\frac{3}{32\pi G a_{\min}^2}\,[1 + 2\delta\,(\Delta\eta)^{-2(1+\delta)}].$$

* Скалярное поле φ предполагается комплексным; результаты для действительного поля могут быть получены заменой G на $G/2$.

При $\Delta\eta \gg \exp(-\delta^{-1})$ решение (13) гладко переходит в (12). В результате при $\eta = \eta_0$ возникает истинная сингулярность гравитационного поля вида (9).

Из условия $|\rho| < \rho_0$ вытекают абсолютные верхние (хотя и слабые) пределы на массы векторных мезонов и хиггсовских бозонов:

$$m_V < e\sqrt{3/4\,\pi G} \approx 8\cdot 10^{17}\ \text{ГэВ}\ (\text{при}\ e^2 \sim 1/50),$$

$$m_H < \sqrt{3\lambda/4\pi G} \approx \sqrt{\lambda}\, 6\cdot 10^{18}\ \text{Гэв}.$$

Вблизи сингулярности вида (9) плотность энергии скалярного поля отрицательна за счет первого слагаемого в (1) ($R_0{}^0 < 0$ из-за вклада анизотропии). Может возникнуть вопрос, не приводит ли это к новому типу спонтанного нарушения симметрии, вызванному не механизмом Хиггса, как в модели (3), и не взаимодействием с пространственной кривизной, как в модели ГМФМО, а наличием анизотропии гравитационного поля. Однако нетрудно убедиться, что в первом приближении (т. е. без учета радиационных поправок, которые содержат степени малого параметра λ) такой эффект не возникает.

Во-первых, из уравнения (5) при $n = 0$ и $m^2 = -\mu^2 > 0$ вытекает, что состояние с $\rho = 0$ классически устойчиво (в пропагаторе отсутствует тахионный полюс) в отличие от состояния с $\rho = 0$ в модели Хиггса. Во-вторых, при выяснении возможности подбарьерного перехода необходимо сравнивать различные конфигурации ρ по полной энергии, которая, как хорошо известно, не совпадает с $\int T_0{}^0 \sqrt{-g}\, d^3x$, а содержит еще вклад от энергии собственного гравитационного поля. Если при этом имеются еще и внешние источники гравитационного поля, то сравнение конфигураций нужно проводить при фиксированных источниках, а не при фиксированном результирующем гравитационном поле.

Пусть, например, источником гравитационного поля в метрике I типа Бианки (метрика (6)) является классическое вещество с уравнением состояния $p = k\varepsilon$. Пространственные компоненты уравнений Эйнштейна дают:

$$\frac{\dot g_\beta}{g_\beta} = \frac{C_\beta}{1 - \dfrac{8\pi G}{3}|\rho|^2} = \frac{C_\beta}{1 - \dfrac{8\pi G\,|\chi|^2}{3a^2}}, \quad \sum_{\beta=1}^{3} C_\beta = 0, \tag{14}$$

где C_β — постоянные, задающие затравочную анизотропию гравитационного поля в отсутствие нарушения симметрии. Тогда 0—0 компоненту уравнений Эйнштейна можно привести к виду

$$\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_{eff} = \frac{D}{a^{3(1+k)}} + \frac{|\dot\chi|^2 + m^2|\chi|^2}{a^2} + \frac{\lambda|\chi|^4}{2a^4} + \left(\sum_\beta C_\beta{}^2\right)\Big/\, 16\pi G a^6\left(1 - \frac{8\pi G\,|\chi|^2}{3a^2}\right). \tag{15}$$

Первое слагаемое в H_{eff} представляет собой плотность энергии классического вещества ($D = \text{const} > 0$). Энергию различных конфигураций ρ нужно сравнивать при фиксированных a, C_β, D. Видно, что при $|\rho| < \rho_0$ наиболее энергетически выгодным является состояние с $\rho = 0$. Это вызвано тем, что положительная добавка в энергии собственного гравитационного поля, возникающая из-за изменения анизотропии при изменении ρ с избытком компенсирует отрицательный вклад от $T_0{}^0$. Как и должно быть, H_{eff} обладает свойством каноничности (после перехода к переменной η): при его варьировании по χ при фиксированных a, C_β, D получается правильное уравнение для χ. Полученный результат противоположен выводу Гриба и др. [14], которые не учитывали вклад от собственной гравитационной энергии в полную энергию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киржниц Д. А., Линде А. Д.*— Ж. эксперим. и теор. физ., 1974, *67*, 1263.
2. *Криве И. В., Линде А. Д., Чудновский Е. М.*— Ж. эксперим. и теор. физ., 1976, *71*, 825.
3. *Penrose R.*— In: Relativity, Groups and Topology/Ed. De Witt C., De Witt B. N. Y.— London, 1964, p. 565.
4. *Chernikov N. A., Tagirov E. A.*— Ann. Inst. H. Poincaré, 1968, *9*, 109.
5. *Callan C. G., Coleman S., Jackiw R.*— Ann. Phys., 1970, *59*, 42.
6. *Линде А. Д.*— Письма в ЖЭТФ, 1979, *30*, 479.
7. *Bronnikov K. A., Kireev Yu. N.*— Phys. Letters, 1978, *67A*, 95.
8. *Белинский В. А., Халатников И. М.*— Ж. эксперим. и теор. физ., 1972, *63*, 1121.
9. *Bekenstein J. D.*— Phys. Rev. D, 1975, *11*, 2072.
10. *Гриб А. А., Мостепаненко В. М., Фролов В. М.*— Теор. и матем. физ., 1978, *37*, 347.
11. *Grib A. A., Mostepanenko V. M., Frolov V. M.*— Phys. Letters, 1978, *65*A, 282.
12. *Мельников В. Н.*— Докл. АН СССР, 1979, *246*, 1351.
13. *Melnikov V. N., Orlov S. V.*— Phys. Letters, 1979, *70A*, 263.
14. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.*— Письма в ЖЭТФ, 1980, *32*, 143.

Ин-т теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР,
Москва

Поступила в редакцию
20 октября 1980 г.