УДК 524.7

СФЕРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ

Л. П. ОСИПКОВ

Получено и решено интегральное уравнение для фазовой плотности сферических систем гравитирующих тел с эллипсоидальным распределением скоростей. Для частного случая изотропного распределения скоростей найденное решение переходит в решение, полученное Эддингтоном. Построены новые фазовые модели сферических систем с потенциалами Паренаго и Шустера — Пламмера.

SPHERICAL SYSTEMS OF GRAVITATING BODIES WITH AN ELLIPSOIDAL VELOCITY DISTRIBUTION, by L. P. Osipkov. An integral equation for the phase density of spherical gravitating systems with an ellipsoidal velocity distribution is obtained and solved. The solution coincides with the Eddington's one for the special case of the isotropic velocity distribution. New phase models of spherical systems with Parenago and Schuster — Plummer potentials are constructed.

1. Введение. В последнее время усилился интерес к построению точных самосогласованных моделей сферических систем гравитирующих тел (Бисноватый-Коган и Зельдович, 1969а,б; Зельдович и Новиков, 1970; Зельдович и др., 1972). Подобные модели служат для представления пространственно-кинематической структуры реальных скоплений звезд и галактик, а также создают основу для изучения устойчивости и динамической эволюции сферических звездных систем.

Известно, что при заданном законе плотности сферической системы возможны различные законы распределения скоростей. Как установил еще Эддингтон (1916), при изотропном распределении скоростей пространственная и фазовая плотность связаны взаимно однозначным образом. Однако, согласно современным космогоническим представлениям, более вероятно преобладание почти прямолинейных орбит, проходящих вблизи центра системы (Агекян и Петровская, 1962; Антонов и др., 1975).

Различные способы построения моделей сферических систем с несферическим распределением скоростей предложили Камм (1952), Велтманн (1961, 1965), Бувье (1966) и др. К сожалению, эти способы, как правило, отличаются большой сложностью. При этом остается неясным, какой именно метод следует предпочесть в каждом конкретном случае.

В данной работе разрабатывается методика построения сферических самогравитирующих моделей с эллипсоидальным распределением скоростей. Оказывается, что в этом случае методика сравнительно проста и почти не отличается от случая изотропного распределения скоростей. В пределе мы получаем модели с почти радиальными орбитами. Физически маловероятный противоположный предельный случай систем с круговыми орбитами оказывается у нас исключенным.

2. Исходные соотношения. Введем следующие обозначения: $U(r)$ — гравитационный потенциал на расстоянии r от центра, $\nu(r)$ — плотность системы, v_r, v_t — радиальная и поперечная компоненты скорости звезды,

$f(r, v_r, v_t)$ — фазовая плотность, r_* — радиус системы (для неограниченных моделей $r_* = \infty$).

Ясно, что

$$\nu(r) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} f(r, v_r, v_t)\, v_t dv_t dv_r. \qquad (1)$$

В качестве новой независимой переменной введем вместо r величину $y = 2[U(r) - U(r_*)]$.

Для стационарных сферических систем единственными аргументами фазовой плотности являются интеграл энергии $x_0 = y - v_r^2 - v_t^2$ и квадрат кинетического момента $\xi = r^2 v_t^2$. При эллипсоидальном распределении скоростей в фазовую плотность может входит лишь линейная комбинация этих величин, т. е.

$$f(r, v_r, v_t) = \Psi(x_\lambda), \qquad (2)$$

где

$$x_\lambda = x_0 - \lambda\xi, \quad \lambda = \mathrm{const}. \qquad (3)$$

Легко показать (Велтманн, 1965), что $\lambda \geqslant -r_*^{-2}$. Обозначив

$$a_\lambda^2 = r^2 / (1 + \lambda r^2),$$

перепишем (3) в следующей форме:

$$x_\lambda = y - (r / a_\lambda)^2 v_t^2 - v_r^2. \qquad (4)$$

Из (4) видно, что изоповерхности фазовой плотности в пространстве скоростей действительно эллипсоиды с отношением осей $(a_\lambda / r) : (a_\lambda / r) : 1$. Являющийся основным для дальнейшего рассмотрения параметр λ характеризует анизотропию распределения скоростей. В случае $\lambda > 0$ распределение становится радиально вытянутым, а при $\lambda < 0$ — радиально сжатым. Вблизи центра системы эллипсоид скоростей во всех случаях превращается в сферу.

3. Основное интегральное уравнение. Подставим выражения (2) и (4) в интегральное соотношение (1). Заменим переменные v_r, v_t на x_λ, ξ и выполним интегрирование по ξ. Обозначим

$$G_\lambda(y) = \nu(r)(r / a_\lambda)^2. \qquad (5)$$

Тогда (1) принимает следующую форму:

$$G_\lambda(y) = 2\pi \int_0^y (y - x_\lambda)^{1/2}\, \Psi(x_\lambda)\, dx_\lambda. \qquad (6)$$

Считая пространственное распределение вещества известным из наблюдений и фиксируя параметр анизотропии λ, мы можем считать функцию $G_\lambda(y)$ заданной. В таком случае (6) — интегральное уравнение относительно неизвестной функции фазовой плотности $\Psi(x_\lambda)$.

Как известно, уравнения типа (6) сводятся к интегральному уравнению Абеля и решаются в конечном виде. Оказывается, что при $G(0) = 0$:

$$\Psi(x_\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\left[G'_\lambda(0)\, x_\lambda^{-1/2} + \int_0^{x_\lambda} \frac{G''_\lambda(t)}{(x_\lambda - t)^{1/2}}\, dt\right]. \qquad (7)$$

В частном случае $\lambda = 0$ формула (7) переходит в решение Эддингтона (1916).

В выражении для фазовой плотности (7), как и в (3), опущен множитель в виде характеристической функции допустимой области на плоскости (x_λ, ξ). Этот множитель легко находится по заданной плотности. Учет его существен при изучении устойчивости моделей (Поляченко и Шухман, 1973).

В связи с найденным общим выражением (7) для фазовой плотности сферических систем с эллипсоидальным распределением скоростей сделаем следующие замечания.

1. Для существования данных моделей оказываются необходимыми дополнительные условия гладкости потенциала (существование «полуторной» производной функции $G_\lambda\ (y)$).

2. Небольшая неточность в знании пространственной плотности может сильно сказаться на виде фазовой плотности.

3. Для неограниченных моделей конечной массы внеинтегральный член в (7) обращается в нуль, а для ограниченных систем, вообще говоря, $G_\lambda'(0) \neq 0$. В последнем случае распределение скоростей является физически неестественным (что ранее было обнаружено лишь для пространственно однородных моделей). Формула (7) показывает, что и в неоднородных, но ограниченных моделях недостаточно звезд с малыми скоростями, но слишком много звезд, достигающих границы.

Приведем еще выражение для дисперсии радиальных скоростей σ_r^2. Легко получить, что

$$\nu\sigma_r^2 = (2\pi/3)(a_\lambda/r)^2 \int_0^y (y - x_\lambda)^{3/2}\, \Psi(x_\lambda)\, dx_\lambda.$$

Подставляя сюда (7) и учитывая определение (5), находим, что

$$\sigma_r^2 = \frac{\pi^2}{4} \int_0^y G_\lambda(t)\, dt / G_\lambda(y). \tag{8}$$

Из (2) и (4) следует, что независимо от закона плотности отношение радиальной и трансверсальной дисперсий равно

$$2\sigma_r^2\ /\ \sigma_t^2 = (r\ /\ a_\lambda)^2 = 1 + \lambda r^2. \tag{9}$$

4. Примеры. Построим несколько сравнительно простых моделей сферических систем с эллипсоидальным распределением скоростей.

А. *Однородный шар единичного радиуса.* При соответствующем выборе единиц

$$y = 1 - r^2,\ \ G_\lambda(y) = 3[(1 + \lambda) - \lambda y].$$

Решение (7) существует только, если $G_\lambda(0) = 0$, что не выполняется для данного примера. Известно (Зельдович и др., 1972), что фазовые модели однородных шаров со сферическим распределением скоростей невозможны. Теперь же мы получаем, что не существует моделей и с эллипсоидальным распределением скоростей, исключая значение $\lambda = -1$. В этом последнем случае мы приходим к так называемой модели Камма (1952), устойчивость которой подробно изучали Поляченко и Шухман (1973).

Б. *Сферическая модель с потенциалом Паренаго.* Распределение вещества в такой модели исследовал Идлис (1961). Он нашел, в частности, что

$$U(r) = \frac{1}{1 + r^2} + \text{const}, \qquad \nu(r) = \frac{2(3 - r^2)}{(1 + r^2)^3}, \qquad r_*^2 = 3.$$

Подобная модель представляет интерес как простейшая неоднородная пространственно-ограниченная система. Оказывается, что

$$y = \frac{3 - r^2}{2(1 + r^2)}, \qquad G_\lambda(y) = \frac{1}{4} y(1 + 2y)[(1 + 3\lambda) + 2(1 - \lambda)y],$$

а

$$\Psi(x_\lambda) = \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{4}(1 + 3\lambda)x_\lambda^{-1/2} + 4(1 + \lambda)x_\lambda^{1/2} + 8(1 - \lambda)x_\lambda^{3/2}\right].$$

Фазовая плотность неотрицательна в допустимой области фазового пространства $x_\lambda \leqslant y(0) = 3/2$, если $\lambda < 97\ /\ 45$. Таким образом, возможны модели как с радиально-сжатым ($-r_*^{-2} \leqslant \lambda < 0$), так и со сферическим

($\lambda = 0$) и с заметно радиально-вытянутым распределениями скоростей. Укажем, что только при $\lambda = -r_*^{-2} = -{}^1/_3$ фазовая плотность не является сингулярной. Дисперсия

$$\sigma_r^2 = \frac{2\left[\frac{1+3\lambda}{8} + \frac{1+\lambda}{3}y + \frac{1-\lambda}{4}y^2\right]}{(1+2y)[(1+3\lambda)+2(1-\lambda)y]}\,y.$$

В. *Сферическая модель Шустера — Пламмера.* Такая модель неоднократно предлагалась для аппроксимации хода плотности в реальных звездных скоплениях. Для нее

$$y = (1+r^2)^{-1/2}, \quad \nu(r) = (3/2)(1+r^2)^{-5/2}.$$

Находим

$$\Psi(x_\lambda) = (12/\pi^2)[\lambda x_\lambda^{3/2} + (16/7)(1-\lambda)x_\lambda^{5/2}].$$

В случае $\lambda = 0$ получаем классическую модель Эддингтона (1916), а при $\lambda = 1$ — модель Кузмина и Велтманна (1967). Максимально же возможным оказывается значение $\lambda = 16/9$. Дисперсия радиальных скоростей

$$\sigma_r^2 = \frac{3\lambda + 2(1-\lambda)y^2}{\lambda + (1-\lambda)y^2}\,y = \frac{(2+\lambda)+3\lambda r^2}{1+\lambda r^2}(1+r^2)^{-1/2}.$$

Автор благодарен Ю.-И. К. Велтманну и С. А. Кутузову за обсуждение работы.

Научно-исследовательский ин-т
вычислительной математики и процессов управления
Ленинградского гос. ун-та

Поступила в редакцию
26 июня 1978 г

ЛИТЕРАТУРА

Агекян Т. А. и Петровская И. В., 1962. Уч. зап. Ленингр. ун-та, № 307, 187.
Антонов В. А., Осипков Л. П. и Чернин А. Д., 1975. В сб. «Динамика и эволюция звездных систем», изд. ВАГО АН СССР, М.-Л., 289.
Бисноватый-Коган Г. С. и Зельдович Я. Б., 1969а. Астрофизика, *5*, 223.
Бисноватый-Коган Г. С. и Зельдович Я. Б., 1969б. Астрофизика, *5*, 425.
Бувье (Bouvier P.), 1966. In «The theory of orbits in the solar system and in stellar systems», ed. G. Contopoulos. IAU Symp. No 25, p. 57.
Велтманн Ю.-И. К., 1961. Публ. Тартуск. астрон. обсерв., *33*, 387.
Велтманн Ю.-И. К., 1965. Публ. Тартуск. астрофиз. обсерв., *35*, 5.
Зельдович Я. Б. и Новиков И. Д., 1970. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 23.
Зельдович Я. Б., Поляченко В. Л., Фридман А. М. и Шухман И. Г., 1972. Препринт СибИЗМИР СО АН СССР, № 7—72.
Идлис Г. М., 1961. Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР, *1*.
Камм (Camm G. L.), 1952. Monthly Not. Roy. Astron. Soc., *112*, 153.
Кузмин Г. Г. и Велтманн Ю.-И. К., 1967. Публ. Тартуск. астрофиз. обсерв., *36*, 5.
Поляченко В. Л. и Шухман И. Г., 1973. Астрон. ж., *50*, 721.
Эддингтон (Eddington A. S.), 1916. Monthly Not. Roy. Astron. Soc., *76*, 572.