Письма в АЖ, т. 4, № 4, 1978

УДК 524.83

ОБ ОДНОЙ НЕСИНГУЛЯРНОЙ ИЗОТРОПНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

А. А. СТАРОБИНСКИЙ

Показано, что если основной вклад в плотность энергии вещества, заполняющего изотропную Вселенную, вносит однородное массивное скалярное поле (модель Паркера-Фуллинга), то возможность реализации несингулярного решения (хотя она и имеется) является крайне маловероятной при разумных параметрах модели. Обсуждается физическая реальность моделей такого типа.

ON ONE NONSINGULAR ISOTROPIC COSMOLOGICAL MODEL, by A. A. Starobinskij. It is shown that if the main contribution to the matter energy density in the isotropic Universe is made by a homogeneous massive scalar field (the Parker-Fulling model) then the possibility of the realization of a nonsingular solution, though it exists, is highly improbable at reasonable parameters of the model. Physical reality of such kind of models is discussed.

Хорошо известно, что в однородных изотропных космологических моделях Вселенной, заполненных веществом с уравнением состояния $p = \gamma\varepsilon$ (ε — плотность энергии, p — давление), неизбежно либо возникновение сингулярности в будущем, либо ее существование в прошлом (или то и другое вместе). Как следует из результатов, полученных нами ранее (Зельдович и Старобинский, 1971), учет квантово-гравитационных эффектов может изменить этот вывод и привести к смене сжатия расширением только тогда, когда Вселенная сожмется до планковских кривизн

$$\left(|R_{iklm}R^{iklm}| \sim l_g^{-4},\ l_g = \sqrt{G\hbar/c^3}\right).$$

Возникает важный вопрос: существуют ли другие механизмы, которые могут привести к смене сжатия изотропной модели расширением при кривизнах много меньше планковских? При этом квантово-гравитационные эффекты всегда малы, так что такие механизмы должны быть связаны с квантовыми свойствами самого вещества, заполняющего однородную модель. Для того чтобы эволюция закрытой модели Фридмана была несингулярной, необходимо, чтобы тензор энергии-импульса вещества в некоторые моменты времени не удовлетворял сильному энергетическому условию $\varepsilon + 3p \geqslant 0$. Для прохождения масштабного фактора $a(t)$ через минимум в плоской и открытой моделях Фридмана должно нарушаться условие $\varepsilon \geqslant 0$.

В данной статье рассматривается механизм устранения космологической сингулярности, предложенный Паркером и Фуллингом (1973). Они указали, что если в качестве вещества, заполняющего закрытую модель Фридмана, взять квантованное массивное скалярное поле и учесть только низшую пространственно-однородную моду (причем число заполнения этой моды $N = \langle A^+A\rangle \gg 1$), то условие $\varepsilon + 3p \geqslant 0$ нарушается, и сжатие модели может смениться расширением при радиусе кривизны $\sim m^{-1} \gg l_g$, где m — масса покоя кванта поля *. Паркер и Фуллинг выполнили

* Здесь и далее в статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

также несколько пробных машинных расчетов, подтвердивших возможность несингулярной эволюции модели при определенных начальных параметрах (при других значениях параметров сингулярность возникает). Впоследствии их результат неоднократно цитировался как пример устранения сингулярности за счет квантовых эффектов, однако вопрос о том, с какой вероятностью данный механизм приводит к устранению сингулярности и смене сжатия на расширение, остался неисследованным. Паркер и Фуллинг полагали, что эта вероятность порядка 50%. В действительности это не так. Ниже показано, что при реальных параметрах Вселенной эта вероятность ничтожно мала ($\sim 10^{-43}$) даже для рассматриваемой математической модели, когда основной вклад в плотность энергии вещества вносит когерентное скалярное поле. Физическая реальность этой модели обсуждается в конце статьи.

Прежде всего отметим, что задача об эволюции одной пространственно-однородной моды квантованного вещественного скалярного поля в пределе больших чисел заполнения сводится к задаче об эволюции неквантованного комплексного скалярного поля $\varphi(t)$. Действительно, если $\langle A^+A\rangle \gg 1$, то $\langle AA^+\rangle \approx \langle A^+A\rangle$, и поэтому некоммутирующие операторы рождения и уничтожения A^+ и A можно считать c-числами. Одновременно можно пренебречь ренормализационными поправками к $\langle A^+A + AA^+\rangle$, которые порядка единицы. Конкретно, искомое комплексное скалярное поле $\varphi(t)$ пропорционально волновой функции, стоящей перед некоторым оператором уничтожения B в разложении оператора квантованного действительного скалярного поля, где оператор B обладает тем свойством, что для выбранного гейзенберговского вектора состояния $|\Omega\rangle$ среднее $\langle\Omega|BB|\Omega\rangle = 0$*.

Таким образом, задача свелась к исследованию системы уравнений:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(|\dot\varphi|^2 + m^2|\varphi|^2), \tag{1}$$

$$\ddot\varphi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\varphi + m^2\varphi = 0, \tag{2}$$

где $a(t)$ — масштабный фактор фридмановской модели, точка означает дифференцирование по t, $k = +1, 0, -1$ для закрытой, плоской и открытой моделей соответственно. Величина $\dot a$ может обратиться в нуль только при $k = +1$, поэтому далее будем рассматривать именно этот случай.

Пусть в момент максимального расширения замкнутой Вселенной $a = a_{\max} \gg m^{-1}$. При реальных параметрах ($m \sim m_\pi \sim 2\cdot 10^{-25}$ г; $a_{\max} \sim$ $\sim 10^{28}$ см) $\alpha \equiv m a_{\max} \sim 10^{41}$. При $\left|\frac{\dot a}{a}\right| \ll m$ для уравнения (2) применимо ВКБ-приближение, и решение есть

$$\varphi = a^{-3/2}(C_1 \sin mt + C_2 \cos mt). \tag{3}$$

Тогда

$$a(t) = b(t)\,[1 + \gamma(t)\sin 2mt + \delta(t)\cos 2mt], \tag{4}$$

где $b(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\dot b}{b}\right)^2 + \frac{k}{b^2} = \frac{8\pi G m^2}{3b^3}(|C_1|^2 + |C_2|^2); \tag{5}$$

$$\gamma = -\frac{\pi G}{b^3}(C_1C_2^* + C_1^*C_2), \tag{6}$$

$$\delta = \frac{\pi G}{b^3}(|C_1|^2 - |C_2|^2);\ |\gamma|,\ |\delta| \ll 1 \tag{7}$$

(выражения (6) и (7) при $|t| \gg m^{-1}$ верны всюду, кроме малой области $\Delta t \sim m^{-1}$ около момента максимального расширения).

* В обозначениях Паркера и Фуллинга (1973): $\varphi = (\gamma^*\psi_0 + \delta^*\dot\psi_0^*)\sqrt{(2N+1)/4\pi^2}$.

Таким образом, при $|t| \gg m^{-1}$ скалярное поле имеет эффективное уравнение состояния $|p| \ll \varepsilon$, а сжатие модели Вселенной при $-a_{\max} \ll t \ll -m^{-1}$ идет по закону $a(t) \approx b(t) \propto |t|^{2/3}$. При $t \sim -m^{-1}$ ВКБ-приближение нарушается, а величины γ и δ становятся порядка единицы; при этом $ma \sim \alpha^{1/3} \gg 1$, так что пространственной кривизной можно пренебречь.

При $t > -m^{-1}$, когда $\left|\frac{\dot{a}}{a}\right| > m$, общее решение (2) есть (при $B_1 \neq 0$):

$$\varphi = B_1 \int dt a^{-3} + B_2. \tag{8}$$

Если константа B_1 не аномально мала (в обычной ситуации при $t \sim -m^{-1}$ имеем $|\ddot{\varphi}| \sim m^2 |\varphi|$ и $|B_1| \sim \frac{\alpha}{m^2} |B_2| \sim \frac{\alpha}{m^2 \sqrt{G}}$, то в области $|t| \ll m^{-1}$ скалярное поле имеет эффективное уравнение состояния* $p = \varepsilon$, а $a(t) \propto |t|^{1/3}$. При $t = 0$ возникает истинная сингулярность.

Если же B_1 очень мала, то при $\left|\frac{\dot{a}}{a}\right| \gg m$ в (2) можно пренебречь первым слагаемым. Тогда уточненное решение (2) есть

$$\varphi = B_2 \exp\left[-\frac{m^2}{3} \int_{t_1}^{t} dt a \left(\frac{da}{dt}\right)^{-1}\right], \tag{9}$$

где удобно выбрать $t_1 = \frac{1}{m} \sqrt{24\pi G |B_2|^2} \sim m^{-1}$. В результате $a(t)$ не обращается в нуль и слабо меняется в области

$-m^{-1} < t < m^{-1}$, а при $t \gg m^{-1}$ (но $t < t_2$):

$$a = a_1 \exp(-m^2 t^2/6). \tag{10}$$

Условие сшивки с решением (5) при $|t| \sim m^{-1}$ дает: $a_1 \sim m^{-1} \alpha^{1/3} \gg m^{-1}$. На стадии (10) φ медленно растет: $\varphi = B_2 (t/t_1)$.

Стадия (10) кончается, когда пространственная кривизна становится существенной, т. е. когда $\dot{a}^2 \sim 1$. Это происходит в момент $t = t_2 \approx m^{-1} \sqrt{2 \ln \alpha} \gg m^{-1}$. Анализ (1) и (2) показывает, что затем в течение интервала времени $\Delta t \sim 1/m \sqrt{\ln \alpha}$ сжатие сменяется расширением, и стадии (10) и (5) следуют в обратном порядке. При этом значение $a(t)$ в минимуме есть (при $B_1 = 0$):

$$a_{\min} = \frac{3}{m^2 t_2} = \frac{3}{m \sqrt{2 \ln \alpha}} \ll m^{-1}. \tag{11}$$

Если взять значение $\alpha = 10^{43}$, использованное Паркером и Фуллингом, то $a_{\min} \approx 0.2\, m^{-1}$, $t_2 \approx 14\, m^{-1}$, что находится в хорошем согласии с результатами их машинного расчета.

Определим теперь вероятность того, что решение выйдет на аномальную асимптотику (10) и дойдет по ней до момента $t = t_2$, когда произойдет смена сжатия на расширение. Для этого необходимо, чтобы было $G |B_1|^2 a_{\min}^{-6} < a_{\min}^{-2}$, откуда** $|B_1| < |B_2| \frac{1}{m^2 \ln \alpha}$. Будем считать, что на стадии (5) все значения фазы поля являются равновероятными. Это предположение находится в согласии с основным принципом статистической физики, согласно которому все состояния, имеющие одинаковую энергию, равновероятны. Тогда вероятность того, что сжатие сменится расшире-

* Такое эффективное уравнение состояния имеет безмассовое скалярное поле $\varphi(t)$ при всех t (Белинский и Халатников, 1972).
** Более точный вид этого условия: $8/_9 \pi G |B_1|^2 m^4 \ln^2 \alpha < 1$.

нием и сингулярность не возникнет, есть

$$W \approx \frac{m^2}{\alpha}\left|\frac{B_1}{B_2}\right| \sim \frac{1}{\alpha \ln \alpha} \ll 1. \qquad (12)$$

При указанных реальных параметрах имеем $W \approx 10^{-43}$.

Изложим кратко аналогичные результаты для случая, когда скалярное поле $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению $(\Box + m^2 - R/6)\varphi = 0$, которое, как известно, является конформно-ковариантным при $m = 0$. В этом случае решение с минимумом $a(t)$ возможно только в открытой модели, при $k = -1$ и $a < m^{-1}$ (для частного случая $m = 0$ этот факт был указан Бекенштейном (1974)). Удобно ввести переменные $\eta = \int dta^{-1}$ и $\chi = a\varphi$. Тогда χ удовлетворяет уравнению:

$$\chi'' + (m^2a^2 + k)\,\chi = 0, \qquad (13)$$

где штрих означает дифференцирование по η; плотность энергии скалярного поля есть

$$\varepsilon = a^{-4}\,[|\,\chi'\,|^2 + (m^2a^2 + k)\,|\,\chi\,|^2]. \qquad (14)$$

Пусть $k = -1$. При $\left|\frac{\dot a}{a}\right| \ll m$ в уравнении (13) применимо ВКБ-приближение и ответ снова имеет вид (3) — (7) с той лишь разницей, что в правой части формул (6) и (7) появляется дополнительный множитель $^1/_3$. Обозначим через $-t_M$ момент окончания вакуумной милновской стадии сжатия. Будем считать, что $\beta \equiv mt_M \gg 1$. Тогда $a(t) \propto |\,t\,|$ при $t < -t_M$ и $a(t) \propto |\,t\,|^{2/3}$ при $-t_M < t < -m^{-1}$.

В момент $|\,t\,| \sim m^{-1}$ ($|\,\eta\,| \sim \beta^{-1/3} \ll 1$) величина $ma \sim \beta^{-1/3} \gg 1$. При $|\,t\,| \ll m^{-1}$, $\chi = B_1\eta + B_2$. В типичной ситуации (при выполнении предположения о равновероятности фаз скалярного поля на стадии (5))

$$|B_1| \sim \beta^{1/3}\,|\,B_2\,| \sim \beta^{2/3}/m\sqrt{G}.$$

Тогда при $|\,t\,| \ll m^{-1}$ скалярное поле имеет эффективное уравнение состояния $p = 1/3\,\varepsilon$, и $a(t) \propto |\,t\,|^{1/2}$; сингулярность в этом случае неизбежна. Если же $|\,B_1\,| < |\,B_2\,|$, то при $|\,t\,| \ll m^{-1}$ имеем

$$a(t) = \left(\frac{|\,B_2\,|^2 - |\,B_1\,|^2}{m^2\,|\,B_2\,|^2} + \frac{8\pi G m^2\,|\,B_2\,|^2\,t^2}{3}\right)^{1/2}; \qquad (15)$$

$a(t)$ проходит через регулярный минимум. Вероятность избежать сингулярность

$$W \sim \beta^{-1/3} \ll 1. \qquad (16)$$

Если взять $t_M \sim 10^{16}$ с и $m \sim m_\pi$, то $W \approx 10^{-13}$. Разница между (12) и (16) объясняется различием между зависимостью ε от a при $\left|\frac{\dot a}{a}\right| \gg m$ для двух типов скалярных полей: в первом случае $\varepsilon \propto a^{-6}$ в типичном случае и $\varepsilon \propto \text{const}$ (с логарифмической точностью) — в вырожденном, а во втором — $\varepsilon \propto a^{-4}$ и $\varepsilon \propto a^{-2}$ соответственно.

Следовательно, даже в рассмотренной математической модели вероятность реализации несингулярного решения крайне мала.

В действительности не существует сколько-нибудь убедительных физических аргументов в пользу реальности самой модели. На уровне современных представлений нет основания считать, что при сверхвысоких температурах основной вклад в плотность энергии вещества будет вносить когерентное скалярное поле. Якобс (1975) пытался реализовать разновидность данной модели (с очень большим числом скалярных полей с разными массами), используя модель Хагедорна. Эта попытка, однако, несостоятельна. Не говоря уже о том, что в случае модели Хагедорна основной вклад в полную плотность энергии в каждый момент вносит очень большое число полей с практически одинаковой массой (так что совершенно непонятно, как можно добиться того, чтобы хотя бы половина из них была когерентной), существует решающий аргумент против возможности смены сжатия на расширение при кривизнах, меньших планковских, в модели Якобса. Дело в том, что в космологических условиях характерная масса m полей в модели Хагедорна, дающих основной вклад в ε, всегда удовлетворяет условию $m \gg \left|\frac{\dot{a}}{a}\right| \gg a^{-1}$, а при этом, как показано выше, скалярное поле не может способствовать устранению сингулярности.

Таким образом, пока нет поводов ожидать, что коллапс однородной изотропной модели может смениться расширением ранее, чем кривизна пространства — времени достигнет планковского значения и квантово-гравитационные эффекты станут существенными.

Институт теоретической
физики им. Л. Д. Ландау АН СССР

Поступила в редакцию
1 декабря 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

Бекенштейн (Bekenstein J. D.). 1974. Ann. Phys., *82*, 535.
Белинский В. А. и Халатников И. М. 1972. Ж. эксперим. и теор. физ., *63*, 1121.
Зельдович Я. Б. и Старобинский А. А. 1971. Ж. эксперим. и теор. физ., *61*, 2161.
Паркер и Фуллинг (Parker L., Fulling S. A.). 1973. Phys. Rev. D., *7*, 2357.
Якобс (Jacobs K. C.). 1975. Ann. N. Y. Acad. Sci., *262*, 462.

Примечание к корректуре. Более тщательный анализ с учетом равновероятности всех значений каждой из двух фаз arc tg $\left|\frac{C_2}{C_1}\right|$ и arc $\frac{C_2}{C_1}$ позволяет несколько уточнить результат (12): $W \approx (\alpha\sqrt{\ln\alpha}) \approx 10^{-42}$.