

Взрывная неустойчивость газопылевой смеси в холодных газовых дисках с оседанием пыли

Вячеслав Журавлев (ГАИШ МГУ)

Суть работы

Планеты в холодных газопылевых дисках образуются аккумуляцией допланетных тел (планетезималей). Однако, процесс образования самих допланетных тел остается неясным. Анализ нелинейной стадии развития известной неустойчивости газопылевой смеси, возникающей за счет радиального дрейфа пыли (Youdin & Goodman 2005), выявил ряд проблем в ее прямом приложении к формированию допланетных тел. В то же время, исследование динамики газопылевых возмущений в диске с оседанием пыли показало, что в этом случае иная линейная неустойчивость двухкомпонентной среды (Squire & Hopkins 2018) возникает благодаря существованию моды с отрицательной энергией (Zhuravlev 2019). Нелинейная стадия развития новой неустойчивости еще ждет своего исследования, однако известно, что мода с отрицательной энергией может приводить среду и к еще одной неустойчивости — нелинейной неустойчивости взрывного характера. В работе представлен анализ, подтверждающий существование нелинейной взрывной неустойчивости газопылевой смеси при оседании пыли в холодном газовом диске.

Локальная динамика газопылевой среды

Модель

- Локальное приближение: $L \ll h$, где h и L - толщина диска и характерный масштаб задачи.

$$\mathbf{U} \equiv \frac{\rho_g \mathbf{U}_g + \rho_p \mathbf{U}_p}{\rho}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{U}_p - \mathbf{U}_g, \quad \rho \equiv \rho_g + \rho_p.$$

Приближение предельной скорости пылинок

При ограничениях

$$\tau \equiv t_s \Omega_0 \ll 1 \quad \text{и} \quad L \gg l_s \equiv g t_s^2,$$

где g - локальное ускорение свободного падения в диске, а t_s - время торможения пылинки, динамические уравнения принимают упрощенный вид:

$$\partial_t \mathbf{U} - 2\Omega_0 U_y \mathbf{e}_x + \frac{\Omega_0}{2} U_x \mathbf{e}_y + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

$$\partial_t \rho_p + (\mathbf{U} \nabla) \rho_p + t_s \rho \nabla \cdot \left(\rho_p \frac{\nabla p}{\rho^2} \right) = 0.$$

- Локальные координаты в диске: $r \rightarrow x, \quad \varphi \rightarrow y, \quad z$.

- Аксиально-симметричные решения.

- Скорости газа и пыли, \mathbf{U}_g и \mathbf{U}_p , с плотностями ρ_g и ρ_p , измеряются относительно опорной кеплеровской скорости $\mathbf{U}_{sh} \equiv -\frac{3}{2} \Omega_0 x \mathbf{e}_y$ в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\Omega_0 > 0$. Газ обладает давлением p .

- Производится переход к скорости центра масс смеси и относительной скорости пыли и газа:

Слабо-нелинейная динамика газопылевых возмущений на фоне оседающей пыли

Локально стационарное оседание пыли

$$\mathbf{U} = 0,$$

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -g_z \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{V} = -t_s g_z \mathbf{e}_z,$$

$$f \equiv \rho_p / \rho_g = const \ll 1.$$

Уравнения для возмущений:

$$\partial_t \mathbf{u} - 2u_y \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} u_x \mathbf{e}_y + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla W - \frac{f}{\tau} \delta \mathbf{e}_z + f \delta \nabla W,$$

$$\partial_t \delta = -2\tau \partial_x u_y + (1-f) \partial_z \delta + \tau \sum_{i,k=1}^2 \partial_k u_i \partial_i u_k - \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) + f \partial_z \delta^2,$$

где \mathbf{u} - (вихревое) эйлерово возмущение скорости центра масс смеси, а p' и ρ_p' - эйлеровы возмущения давления газа и плотности пыли, входящие в $W \equiv p'/\rho$ и $\delta \equiv \rho_p'/\rho_p$. Скорость, время и расстояние измеряются в единицах $g_z t_s$, Ω_0^{-1} и $g_z t_s / \Omega_0 \equiv \tilde{k}^{-1}$.

Линейное решение

$$\text{Моды возмущений} \propto e^{-i\omega t + ik_x x + ik_z z}$$

$$D_g^+(\omega, \mathbf{k}) \cdot D_g^-(\omega, \mathbf{k}) \cdot D_p(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k}),$$

инерционные волны (ИВ): $D_g^\pm(\omega, \mathbf{k}) \equiv \omega \mp \omega_i = 0$,
волна пылевого потока (ВПП): $D_p(\omega, \mathbf{k}) \equiv \omega - \omega_p = 0$,

$$\omega_i \equiv \frac{k_z}{k}, \quad \text{и} \quad \omega_p \equiv -k_z(1-f), \quad \text{где} \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2,$$

$$\epsilon(\mathbf{k}) \equiv f \frac{k_x^2}{k^2} k_z.$$

Вдали от линейного резонанса, $-\omega_i = \omega_p$, где реализуется линейная резонансная неустойчивость газопылевой смеси Squire & Hopkins (2018), Zhuravlev (2019), существуют нейтральные моды с частотами:

$$\text{ВПП:} \quad \omega(\mathbf{k}) \approx \omega_p + f \frac{k_x^2}{k_z k^2} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)^{-1},$$

$$\text{ИВ:} \quad \omega(\mathbf{k}) \approx \mp \omega_i \mp \frac{f}{2} \frac{k_x^2}{k_z k} \left(1 \mp \frac{1}{k} \right)^{-1}.$$

Трехволновой резонанс газопылевых мод

Квадратичное взаимодействие волн малой конечной амплитуды сильно в окрестности нелинейного резонанса. Условие трехволнового резонанса между модами (например, Кадомцев & Карпман (1971)):

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3,$$

$$\omega_1(\mathbf{k}_1) = \omega_2(\mathbf{k}_2) + \omega_3(\mathbf{k}_3).$$

В случае, когда $|\omega_1| > \max\{|\omega_2|, |\omega_3|\}$, и 1я мода обладает энергией противоположного знака по сравнению с остальными модами — трехволновое консервативное взаимодействие мод приводит к их одновременному взрывному росту (например, Рабинович & Реутов (1973)).

Линейное решение выше дает, чтобы уже в пределе $f \rightarrow 0$ такие $k_{1,2,3}$ существуют:

$$k_1 = 2 \cos \left(\frac{\beta_{12} + \beta_{13}}{2} \right),$$

$$k_2 = k_1 \frac{\sin(\beta_{13})}{\sin(\beta_{12} + \beta_{13})},$$

$$k_3 = k_1 \frac{\sin(\beta_{12})}{\sin(\beta_{12} + \beta_{13})},$$

где \mathbf{k}_1 - волновое число ВПП, обладающей отрицательной энергией на фоне с оседающей пылью (Zhuravlev (2019)), $\mathbf{k}_{2,3}$ - волновые числа ИВ с положительной энергией, а $0 < \beta_{12}, \beta_{13} < \pi$ — углы между направлениями распространения ВПП и двух ИВ. Также принято, что $k_z > 0$.

Таким образом, взрывная неустойчивость газопылевой смеси в холодном диске существует в широком диапазоне волновых чисел (0, 2).

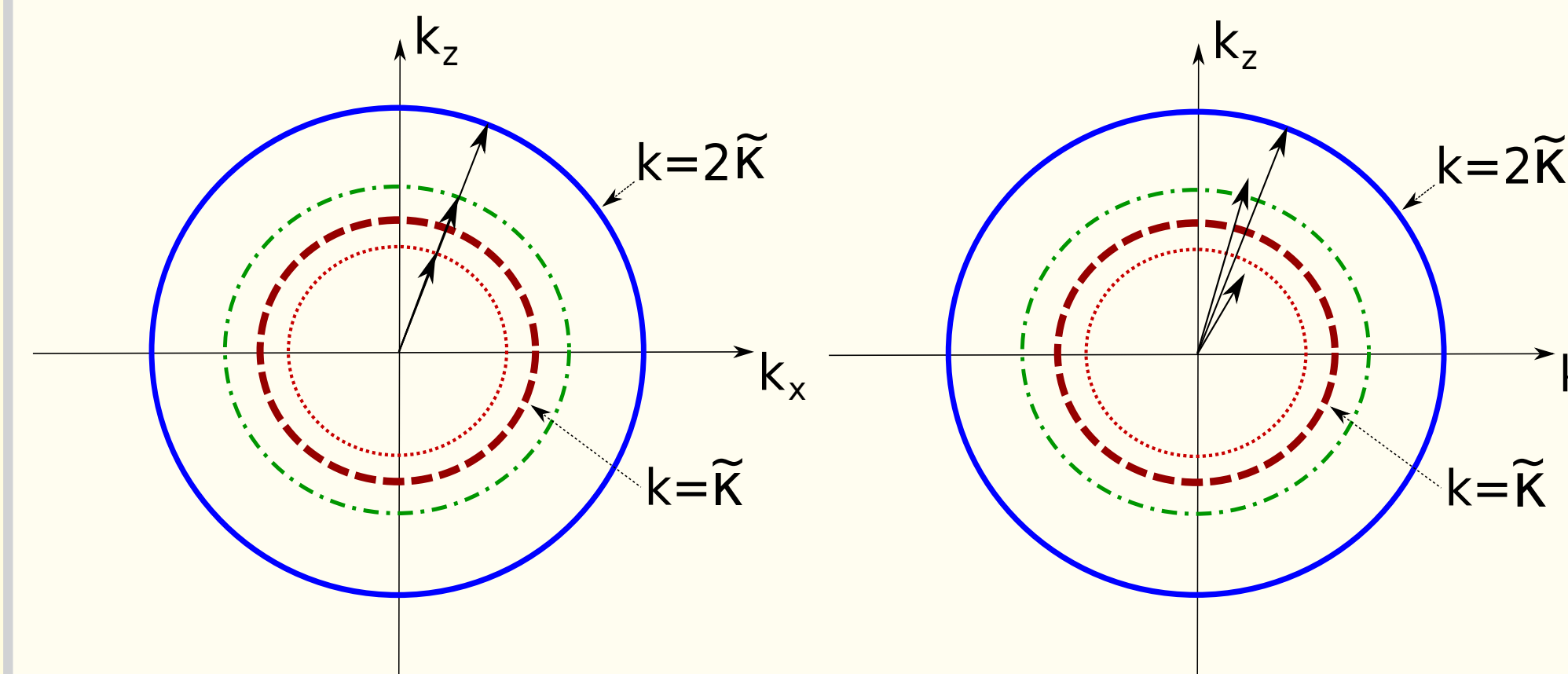
Взаимодействие мод и время взрывного роста

Рассмотрен аналитически только вырожденный случай $a\beta_{12} \rightarrow (1-a)\beta_{13} \rightarrow 0$, где свободный параметр $0 < a < 1/2$:

$$\mathbf{k}_2 = a\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{k}_3 = (1-a)\mathbf{k}_1 \quad \text{and} \quad |\mathbf{k}_1| = 2.$$

В случае $f > 0$ поправка к волновым числам ИВ, $\mathbf{k}_{2,3} \pm \Delta\mathbf{k}$, следует из приближенного решения линейной задачи при $f \ll 1$:

$$k_{1x} \Delta k_z - k_{1z} \Delta k_x = f \frac{8a(1-a)}{2a-1} \left(\frac{k_{1z}}{k_{1x}} + \frac{5}{6} \frac{k_{1x}}{k_{1z}} \right).$$



Левая панель: $f = 0$, правая панель: $f > 0$. Сплошная, штрихпунктирная и пунктирная окружности соотв. ВПП и двум ИВ.

Штриховая линия соотв. линейному резонансу.

Взаимодействие мод возможно только при $f > 0$.

Уравнения трехволнового взаимодействия:

$$\dot{A}_1 = Q_1 A_2 A_3,$$

$$\dot{A}_2 = Q_2 A_1 A_3,$$

$$\dot{A}_3 = Q_3 A_1 A_2,$$

где A_1 - амплитуда ВПП, $A_{2,3}$ - амплитуды ИВ. Постоянные взаимодействия

$$Q_1 = -\frac{16}{3\pi} f \tau \frac{a(1-a)(20+k_z^2)}{(2a-1)^2 k_z^4},$$

$$Q_2 = Q_3 = -\frac{1}{3\pi} \frac{f^2 a(1-a)(20+k_z^2)}{\tau (2a-1)^2 k_z^2}$$

являются отрицательно определенными, что и соответствует взрывному решению с $A_{1,2,3}(t \rightarrow t_e) \rightarrow \infty$, где в случае начально доминантной ИВ время взрывного роста дается выражением:

$$t_e \approx \frac{3\pi}{4A_{2,3}(0)} \frac{1}{f^{3/2}} \frac{(2a-1)^2}{a(1-a)} \frac{k_z^3}{20+k_z^2},$$

которое может быть ограничено снизу применимостью аналитического приближения следующим образом:

$$t_e \gtrsim \frac{10}{A_{2,3}(0) f^{1/6}}.$$

Выводы

Оседание пыли сквозь газовую среду в холодном диске приводит к появлению газо-пылевых возмущений с отрицательной энергией. В пределе $f \rightarrow 0$ - это ВПП, т.е. простой перенос возмущений плотности пыли.

ВПП с отрицательной энергией способна вступать в трехволновой нелинейный резонанс в двумя ИВ с положительной энергией во всем диапазоне волновых чисел меньше удвоенного характерного значения, задаваемого отношением кеплеровской угловой скорости к линейной скорости оседания пыли.

Отрицательная энергия ВПП делает возможным взрывной рост всех трех резонансных волн при консервативном резонансном взаимодействии.

Для вырожденного случая коллинеарных резонансных мод проинтегрирован аналитический расчет констант взаимодействия, который позволил оценить время взрывного роста для малой массовой доли пыли. Для случая начально доминирующей ИВ время взрывного роста слабо растет с уменьшением массовой доли пыли и падает обратно пропорционально начальной амплитуде ИВ.

При перенормировке начальной амплитуды ИВ в единицы характерной скорости звука в диске время взрывного роста формально стремится к нулю пропорционально параметру Стокса, $\tau \rightarrow 0$, с уменьшением размера пылинок. Физически это вызвано ростом градиента возмущения скорости с соответствующим уменьшением масштаба резонанса. Взрывная неустойчивость на достаточно малых масштабах подавляется турбулентной вязкостью.