

Статистические свойства магнитного поля при развитии вейбелевской неустойчивости

М. А. Гарасёв, Е. В. Деришев

Институт прикладной физики, Нижний Новгород

ИЕА, декабрь 2021г.

Вейбелевская неустойчивость

- Возникает в плазме с анизотропным распределением частиц
- Приводит к генерации турбулентных магнитных полей, с энергией сравнимой с плотностью свободной энергии плазмы
- Развивается на временах, сравнимых с плазменным временем ω_p^{-1}

Наибольший интерес представляет по отношению к двум задачам — возникновение магнитных полей при лазерной абляции плазмы (Fox et al., 2015) и бесстолкновительные ударные волны в астрофизике (Medvedev & Loeb, 1999).

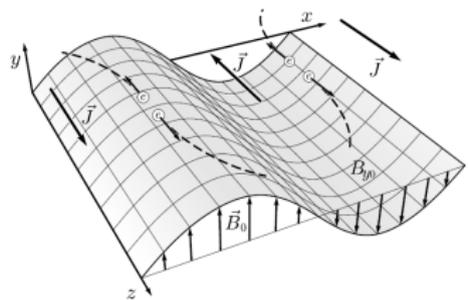


Fig. 1. Qualitative representation of the linear phase of Weibel instability. Development of current sheets \vec{J} around the zeros of B_y (shown as a surface). B_x , B_z considered zero for simplicity.

Линейная теория для двухтемпературной плазмы

Функция распределения

$$f(p) \sim \exp\left(-p_{\perp}^2/(mT_{\perp}) - p_{\parallel}^2/(mT_{\parallel})\right)$$

Дисперсионное соотношение

$$K^2 - \Omega^2 = A + (1 + A)\xi Z(\xi),$$

где $\xi = \Omega / \langle v_{\perp} \rangle$ и Z — функция плазменной дисперсии:

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-x^2}}{x - \xi} dx.$$

$$A = \frac{\langle p_{\parallel} \rangle^2}{\langle p_{\perp} \rangle^2} - 1 = \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} - 1.$$

$$k_{\text{limit}} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{A}$$

Декремент магнитного поля в изотропной плазме (при $A \rightarrow 0$): $\gamma_k \sim k^3$.

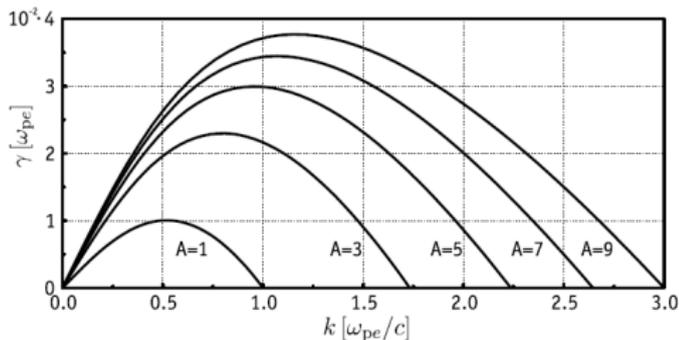


Fig. 2. Growth rate of WI for various values of anisotropy at constant accentuated thermal velocity $u_z = 0.1 [c]$.

Используемые обозначения

Для удобства введены следующие безразмерные величины:
волновой вектор — $K = \frac{kc}{\omega_p}$, , нормирован таким образом, что в случае умеренной анизотропии ($A \sim 1$) волновое число $K = |K|$ наиболее быстро растущих возмущений магнитного поля оказывается несколько меньше единицы.

Магнетизация, которая представляет собой отношение средней (по области расчета) плотности энергии магнитного поля к средней плотности кинетической энергии \bar{E} частиц плазмы:

$$\epsilon_B = \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi N \bar{E}}$$

и безразмерная спектральная мощность:

$$f(K) = \frac{\omega_p^2}{8\pi N \bar{E} c^2 k} F(k), \quad \langle B^2 \rangle = \int F(k) dk, \quad \epsilon_B = \int K f(K) dK.$$

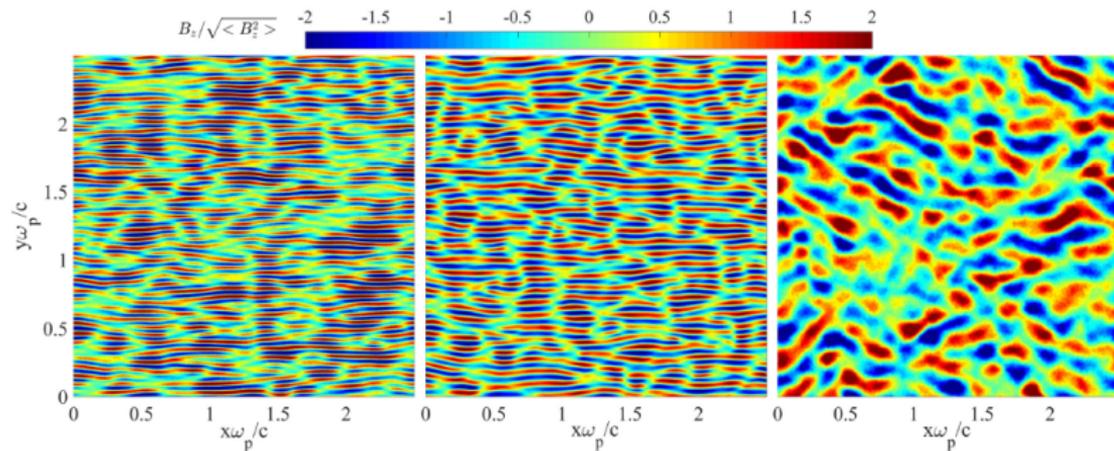
PIC-моделирование вейбелевской неустойчивости

- код EPOCH
- 2D3V геометрия, ось анизотропии в плоскости симуляции
- Периодические граничные условия, сетка $L_x \times L_y = 1200r_D \times 1200r_D$

Начальные условия: квадратная область, наполненная анизотропной электрон-позитронной плазмой e^-e^+ , $T = 10 - 5000$ кэВ. Анизотропия варьировалась в пределах $A = T_{\parallel}/T_{\perp} - 1 = 0.1 : 100$. Несколько серий симуляций:

- Развитие вейбелевской неустойчивости с уровня численных шумов с различной начальной анизотропией
- Развитие вейбелевской неустойчивости в плазме с заранее заданным широким начальным спектром.
- Развитие вейбелевской неустойчивости с заранее заданным спектром в виде набора небольшого числа мод.

The growth of magnetic filaments



Стадии вейбелевской неустойчивости

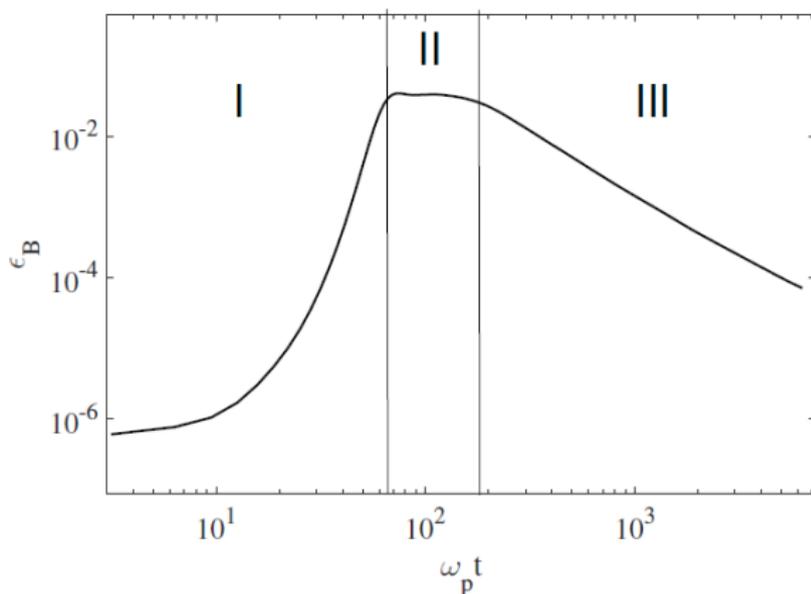


Рис. 1: Магнетизация в зависимости от времени для начальной анизотропии $A = 2$. Римскими цифрами обозначены стадии развития вейбелевской неустойчивости. *I* — стадия экспоненциального роста (линейная стадия), *II* — стадия насыщения, *III* — стадия затухания.

Насыщение роста магнитного поля

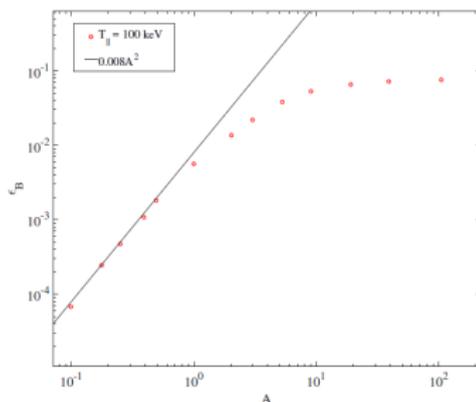


Figure 1. The maximum magnetization dependence on the value of initial anisotropy. $T_{\parallel} = 100$ keV.

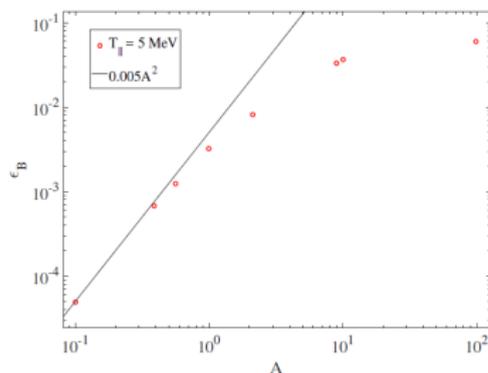


Figure 2. The maximum magnetization dependence on the value of initial anisotropy. $T_{\parallel} = 5000$ keV.

Теоретические представления: $\epsilon_B \sim A^5$ (Pokhotelov, Sagdeev), $\epsilon_B \sim A$ (Kato, 2004).

Пространственный спектр магнитного поля на стадии насыщения

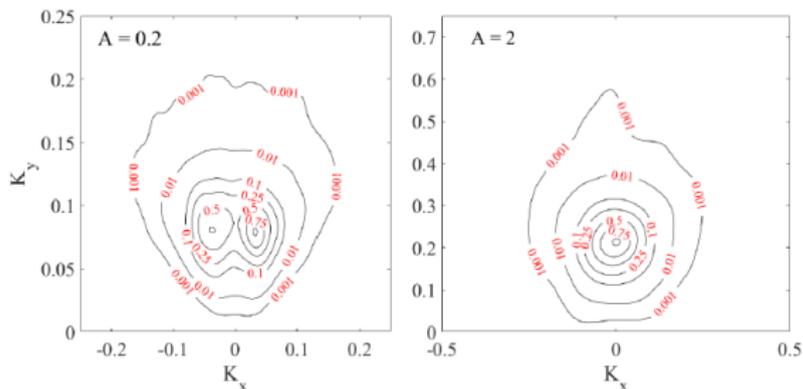


Рис. 1: Нормированный пространственный спектр мощности магнитного поля в момент максимальной магнетизации для двух значений начальной анизотропии функции распределения ($A = 0.2$ слева и $A = 2$ справа). Линии уровня соответствуют значениям 0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75 от максимума.

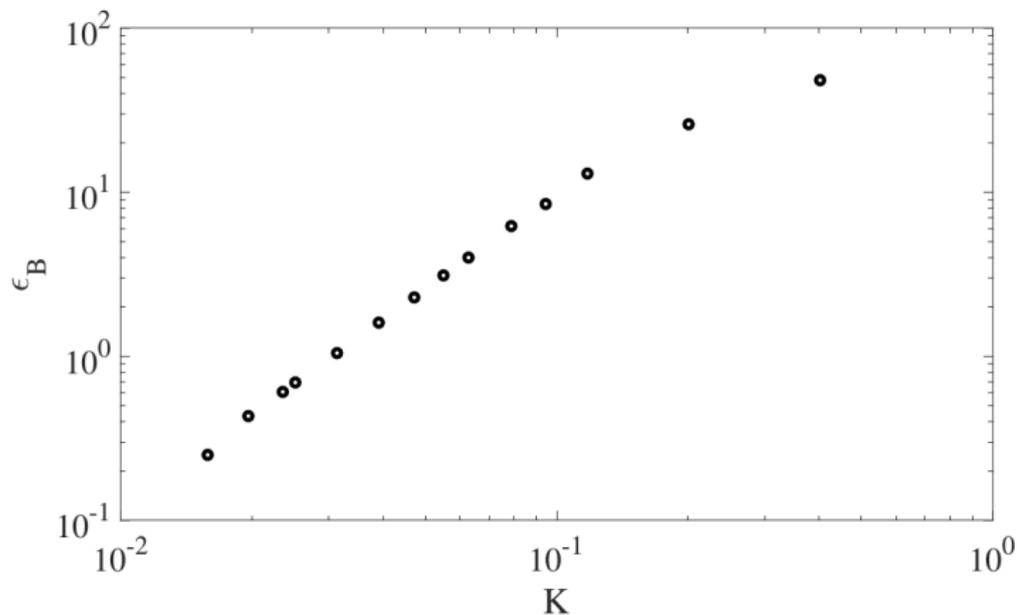


Figure 8. The maximum magnetization in dependence on the K_{\max} . $T_{\parallel} = 100$ keV, $A = 1$. The maximum increment corresponds to $K = 0.453$

Нелинейное взаимодействие мод

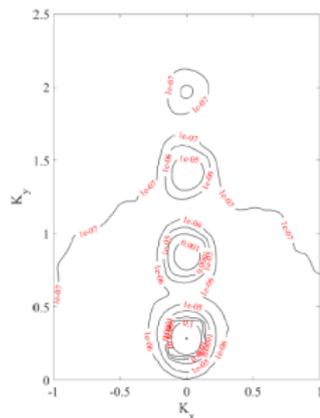


Рис. 2: Спектр мощности магнитного поля для расчета с $\Delta K/K_{\text{max}} = 1/8$ в момент достижения максимума магнетизации. Линии соответствуют следующим уровням: $10^2, 10^4, \dots, 10^8$.

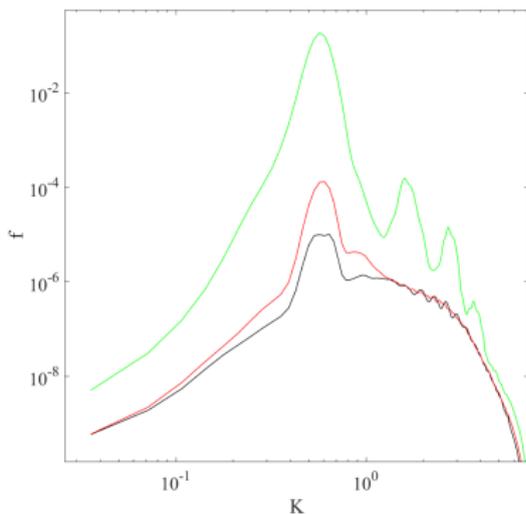


Рис.: В начале стадии насыщения на спектре мощности становятся заметны вторичные пики, соответствующие четырехволновому взаимодействию вейбелевских мод. Тем не менее, даже для $A = 100$, амплитуда этих вторичных пиков на несколько порядков меньше, чем главного, что свидетельствует о довольно слабом вкладе такого процесса в эволюцию магнитного поля.

4-волновое взаимодействие

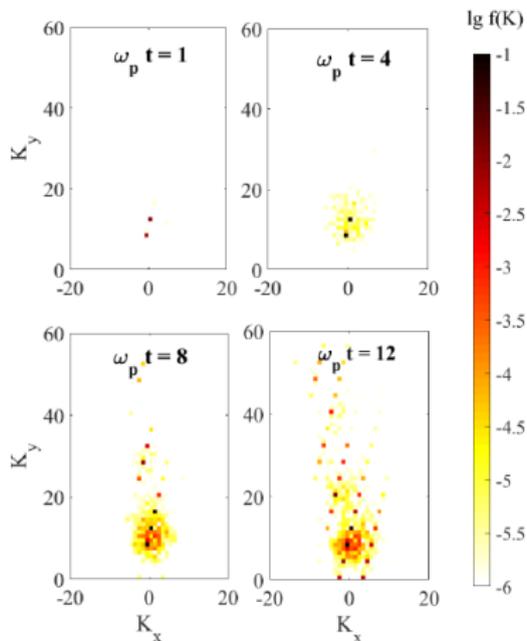
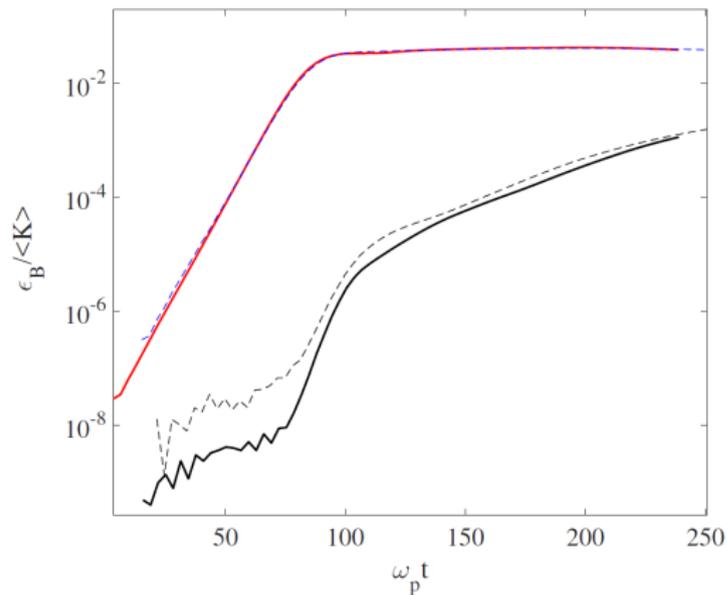


Рис. 7: Появление нелинейных гармоник в спектре мощности магнитного поля. Изначально заданы две моды с волновыми векторами $K_1 = [0, 12]$ и $K_2 = [-1, 8]$. Начальная анизотропия плазмы $A = 2$.

Рост крупномасштабных мод магнитного поля



Зависимость квадрата суммарной нормированной амплитуды мод в области перемычки ($|K_y| < K_{max}/4$) на правой панели предыдущего рисунка от времени (сплошная черная кривая). Для удобства показана также зависимость квадрата интегральной нелинейности, $\epsilon_B / \langle K \rangle$, от времени (сплошная красная кривая). Штриховыми кривыми показаны зависимости тех же величин от времени для контрольного расчета с десятикратно меньшим числом частиц в ячейке. Штриховые кривые сдвинуты по времени на величину, компенсирующую задержку роста магнитного поля при старте с меньшего уровня шумов.

Спектр развитой вейбелевской турбулентности

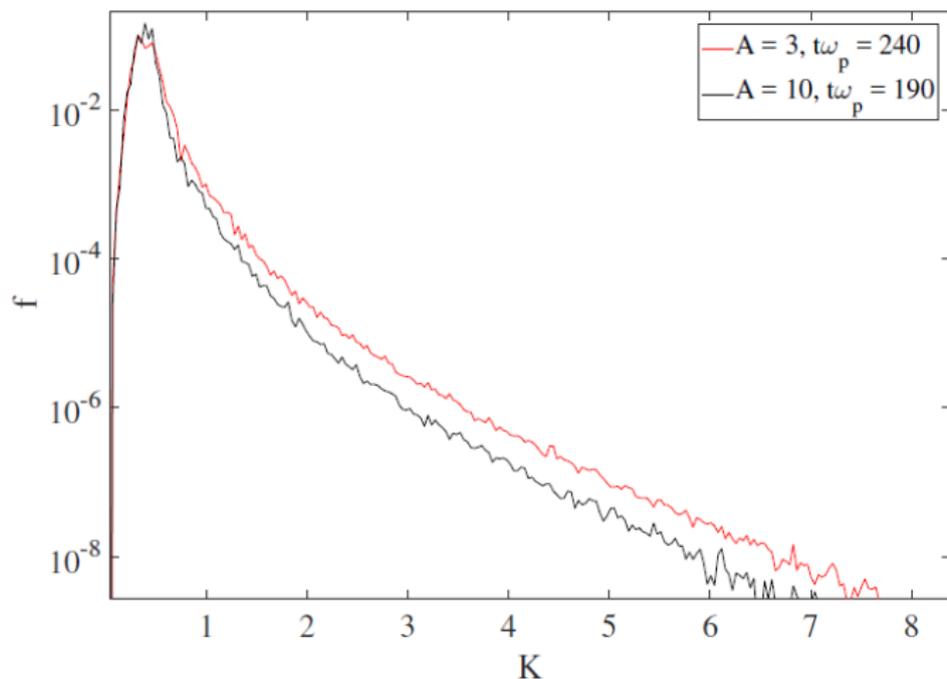
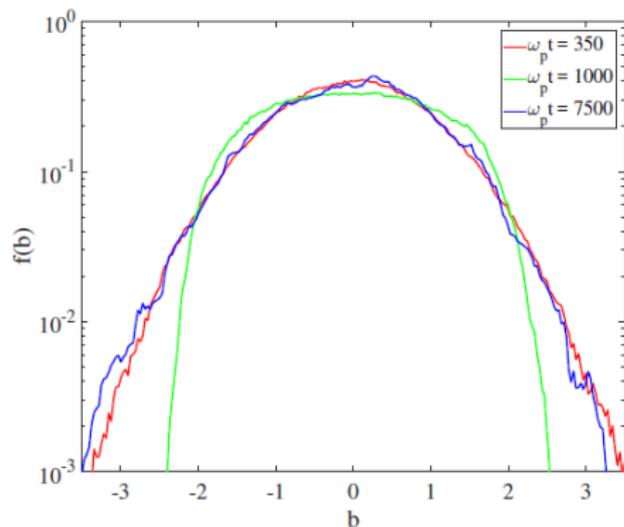


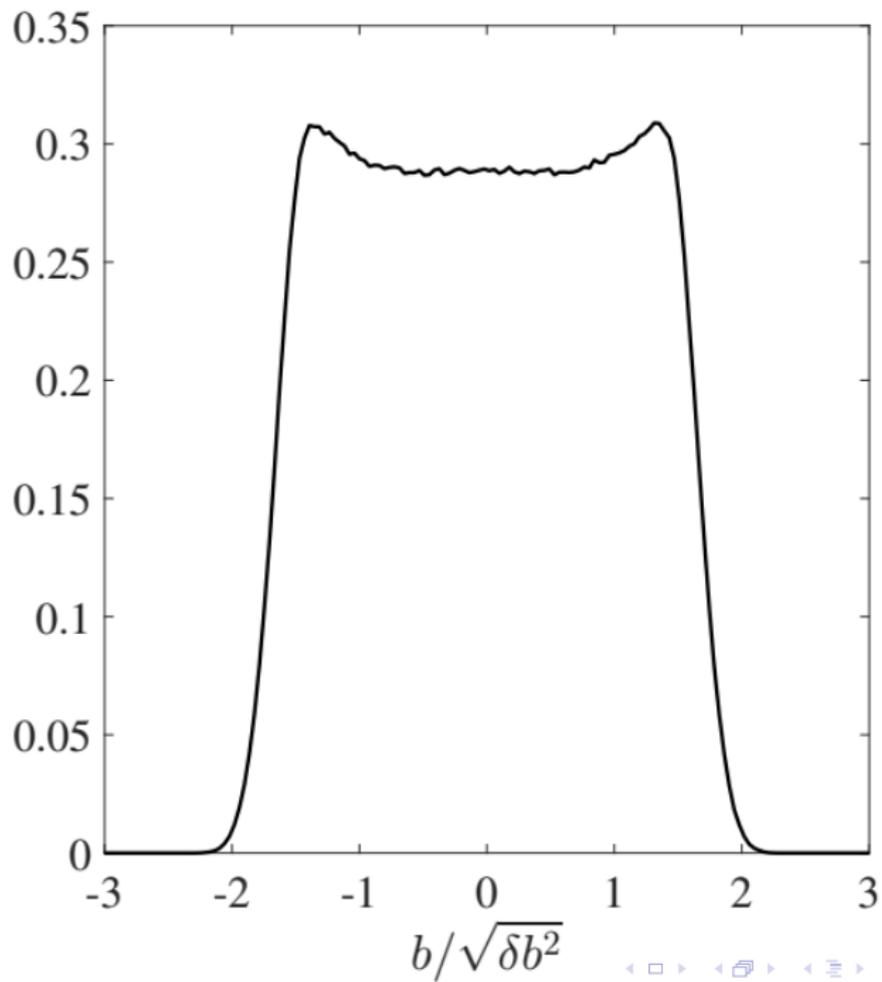
Рис.: Спектр мощности в конце стадии насыщения для симуляции с большой начальной анизотропией. Красная кривая соответствует $A = 3, \omega_p t = 240$ и черная соответствует $A = 10, \omega_p t = 190$.

Эволюция функции распределения амплитуды магнитного поля



Интересная динамика наблюдается при анализе функции распределения амплитуды поля $f(b)$. На линейной стадии $f(b)$ хорошо описывается гауссовой кривой, на стадии насыщения форма кривой становится супергауссовой, приближаясь к характерной для монохроматической волны. На стадии затухания, форма $f(b)$ снова возвращается к гауссовой.

Рис.: Функция распределения вероятности $f(b)$ для амплитуды магнитного поля, b — амплитуда магнитного поля, нормированная на СКО.



Основные результаты

- Безразмерная амплитуда вейбелевских мод, которая характеризует степень нелинейности задачи, всегда мала, даже в том случае когда начальная анизотропия плазмы очень велика, т.е. $A \gg 1$.
- Относительная ширина спектра мощности магнитного поля на стадии насыщения растет с уменьшением начальной анизотропии функции распределения частиц.
- Нелинейное четырехволновое взаимодействие вейбелевских мод может генерировать крупномасштабные магнитные структуры.
- Максимальная магнетизация уменьшается при увеличении начальной ширины спектра затравочного магнитного поля (при одинаковой анизотропии функции распределения частиц). Это может приводить к недооценке магнитных полей, достижимых в реальных условиях, когда из-за низкого уровня начальных возмущений можно ожидать образования достаточно узких спектров генерируемого магнитного поля.
- Более быстрый рост крупномасштабных (и, соответственно, слабозатухающих) магнитных полей наблюдается для более широких спектров мощности возмущений магнитного поля. Из-за этого узкие спектры мощности приводят к более быстрому затуханию магнитного поля.
- На стадии насыщения распределение вероятности амплитуды магнитного поля заметно отличается от гауссового в сторону супергауссовости, т.е. распределение имеет более плоский пик и сильно затухающие хвосты.