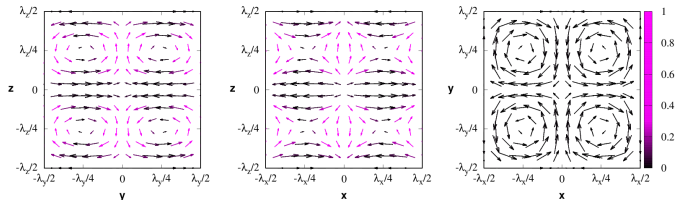


Докритическая турбулентность в пограничных слоях аккреционных дисков

В. Журавлев¹ и Д. Раздобурдин¹

¹ГАИШ МГУ

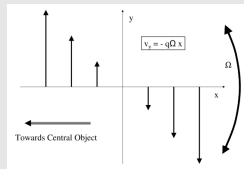
20 Декабря 2018



Рассматриваем малую часть аккреционного потока.

Goldreich & Lynden-Bell (1965).

- 1) Безграничный однородный вращательный сдвиговый поток.
- 2) $\rho_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$.
- 3) y - локальная азимутальная (streamwise) координата.
- 4) x - локальная радиальная (shearwise) координата.
- 5) z - локальная вертикальная (spanwise) координата.



из Mukhopadhyay et al. (2005)

* Накладываем 3D гидродинамические вихревые возмущения $\nabla v = 0$.

Нет растущих линейных возмущений $\propto e^{\Im[\omega]t} \Rightarrow$ возможна только докритическая турбулентность:

- Существование возмущений с большим транзиентным ростом.
- Положительный нелинейный отклик в резервуар таких возмущений.

Главная идея работы - объединить анализ всех
центробежно устойчивых вращательных сдвиговых потоков:

$$v_y = -q\Omega_0 x, \text{ где } -\infty < q < 2.$$

- Квази-кеплеровский режим: $q > 0$.
 $dL/dr > 0$ but $d\Omega/dr < 0$
(аккреционные и протопланетные диски;
Shakura & Sunyaev (1973), Lynden-Bell & Pringle (1974)).
- Циклонический режим: $q < 0$.
 $dL/dr > 0$ and $d\Omega/dr > 0$
(пограничные слои вокруг звезд со слабым магнитным полем;
Shakura & Sunyaev (1988), Popham & Sunyaev (2000)).

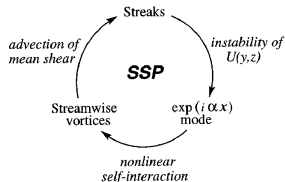
Важные частные случаи:

- 1) $q = 0$ - твердотельное вращение
- 2) $q = \pm\infty$ - плоско-параллельный поток
- 3) $q = 3/2$ - кеплеровский поток
- 4) $q = 2$ - поток с постоянным удельным моментом импульса (линия Рэлея)

Сдвиг скорости	Линейная динамика	Турбулентность	Механизм
$q = 0$	Нет роста	Не существует	-----
$2 < q < +\infty$	Центробежная неустойчивость по критерию Рэля	Сверхкритическая	Вихри Тэйлора
$q = \pm\infty$	Эффект <i>lift-up</i> : транзиентный рост <i>роллы</i> $\rightarrow$ <i>стрейки</i>	Докритическая $R_T \sim 350$	SSP
$q = 2$	Эффект <i>anti-lift-up</i> : транзиентный рост <i>стрейки</i> $\rightarrow$ <i>роллы</i>	Докритическая $R_T \sim 2000$	?
$-\infty < q < 0$	Усиление свингом сдвиговых вихрей (2D)	Докритическая (для $ q \gg 1$)	?
$0 < q < 2$	Усиление свингом сдвиговых вихрей (2D)	?	?

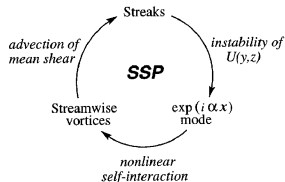
The self-sustaining process (SSP) для плоско-параллельного потока $q = \pm\infty$.

- Роллы вырастают в стрейки высокой амплитуды (эффект lift-up)
- Вторичная линейная неустойчивость относительно не-осесимметричных мод (Теорема Рэлея о точке перегиба в $v_y(x, z)$)
- Регенерация роллов новым существенно 3D потоком
- Впервые продемонстрирован Hamilton et al. (1995).



The self-sustaining process (SSP) для плоско-параллельного потока $q = \pm\infty$.

- Роллы вырастают в стрейки высокой амплитуды (эффект lift-up)
- Вторичная линейная неустойчивость относительно не-осесимметричных мод (Теорема Рэлея о точке перегиба в $v_y(x, z)$)
- Регенерация роллов новым существенно 3D потоком
- Впервые продемонстрирован Hamilton et al. (1995).

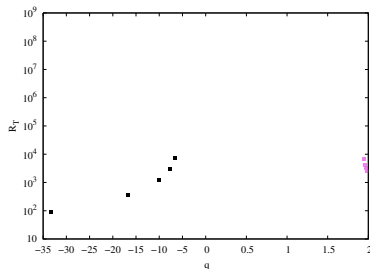


Waleffe (1997)

- 1) Нет аналогичного сценария для потока на линии Рэлея $q = 2$.
- 2) Нет аналогичного механизма линейного роста возмущений в центробежно устойчивых потоках $-\infty < q < 2$ (и lift-up, и anti-lift-up эффекты упразднены силой Кориолиса)

Численный эксперимент в центробежно устойчивых потоках $-\infty < q < 2$.

- Anti-lift-up $\Rightarrow g \approx 2/(2 - q)$,
что дает $g(q = 1.94) \approx 33$.
- Lift-up $\Rightarrow g \approx (2 - q)/2$,
что дает $g(q = -6) \approx 4$
(но: для $q = -\infty$ и $R_T = 350$
имеем $g \approx 100$).
- Усиление свингом $\Rightarrow g \approx (|q|R_T)^{2/3}$,
что дает вариацию с фактором ~ 7
вдоль черных точек.

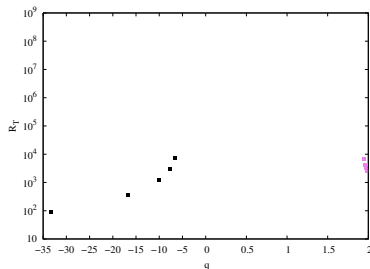


Lesur & Longaretti (2005).

Фурье-код для вихревой динамики 64^3 .

Численный эксперимент в центробежно устойчивых потоках $-\infty < q < 2$.

- Anti-lift-up $\Rightarrow g \approx 2/(2 - q)$,
что дает $g(q = 1.94) \approx 33$.
- Lift-up $\Rightarrow g \approx (2 - q)/2$,
что дает $g(q = -6) \approx 4$
(но: для $q = -\infty$ и $R_T = 350$
имеем $g \approx 100$).
- Усиление свингом $\Rightarrow g \approx (|q|R_T)^{2/3}$,
что дает вариацию с фактором ~ 7
вдоль черных точек.



Lesur & Longaretti (2005).

Фурье-код для вихревой динамики 64^3 .

Существует ли какой-либо иной механизм транзientного роста,
дающий $g \approx \text{const} \gg 1$ вдоль черных точек?..

u_x, u_y, u_z, p - Эйлеровы возмущения скорости и давления:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_x - 2\Omega_0 u_y &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_y + (2 - q)\Omega_0 u_x &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial}{\partial y}\right) u_z &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Переходим к ПФГ в безразмерных сдвиговых координатах:

$$f = \hat{f}(k_x, k_y, k_z, t') \exp(ik_x x' + ik_y y' + ik_z z'),$$

$$x' = x/L, y' = (y + q\Omega_0 x t)/L, z' = z/L, t' = \Omega_0 t.$$

Произвольное L соответствует $k_y = 1$.

Динамические переменные: u_x и x -проекция $\hat{\omega} \equiv k \times \hat{u}$.

$$\underline{k_y = 1, k_z = 0:}$$

$$\frac{d\hat{u}_x}{dt} = -2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2} \hat{u}_x - R^{-1} k^2 \hat{u}_x,$$

$$\tilde{k}_x \equiv k_x + qt, \quad k^2 \equiv 1 + \tilde{k}_x^2, \quad R \equiv \frac{\Omega_0 L^2}{\nu}.$$

- В отсутствие вязкости для туго закрученной ПФГ $k_x \gg 1$:

$$\hat{u}_x = \frac{k_x}{\tilde{k}^2} \quad \text{дает} \quad g \equiv \frac{(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{\tilde{k}_x=0}}{(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{t=0}} = k_x^2.$$

- Диссипация ограничивает загрузку ПФГ:

$$t_v \simeq t_{tg} \quad \Rightarrow \quad k_{x \max} = -\text{sgn}(q)(R|q|)^{1/3},$$

- давая наибольшее **усиление свингом**:

$$g_{\max} = (R|q|)^{2/3}.$$

$k_y = 1, k_z \ll 1$ (только здесь $R \rightarrow \infty$):

Система уравнений расщепляется

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x.\end{aligned}$$

Ускорение жидкости в вертикальном направлении
наводится динамикой усиления свингом.

$k_y = 1, k_z \ll 1$ (только здесь $R \rightarrow \infty$):

Система уравнений расщепляется

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x.\end{aligned}$$

Ускорение жидкости в вертикальном направлении
наводится динамикой усиления свингом.

Аналитическое решение для $\hat{u}_z|_{t=0} = 0$, $(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{t=0} = 1$, $k_x \gg 1$ и $t \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}_z \rightarrow \operatorname{sgn}(q) \pi k_z |k_x| \frac{2 - q}{q} \quad (\hat{u}_x, \hat{u}_y \rightarrow 0).$$

$k_y = 1, k_z \ll 1$ (только здесь $R \rightarrow \infty$):

Система уравнений расщепляется

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x.\end{aligned}$$

Ускорение жидкости в вертикальном направлении
наводится динамикой усиления свингом.

Аналитическое решение для $\hat{u}_z|_{t=0} = 0$, $(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{t=0} = 1$, $k_x \gg 1$ и $t \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}_z \rightarrow \text{sgn}(q) \pi k_z |k_x| \frac{2 - q}{q} \quad (\hat{u}_x, \hat{u}_y \rightarrow 0).$$

- 1) По мере усиления свингом квази-2D сдвиговой вихрь порождает существенно 3D роллы высокой амплитуды, ориентированные в радиальном направлении.
- 2) Если условие $k_z \leq k_{z \max}(q)$ нарушено, то усиление свингом подавляется.

$k_y = 1, k_z \ll 1$ (только здесь $R \rightarrow \infty$):

Система уравнений расщепляется

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x.\end{aligned}$$

Ускорение жидкости в вертикальном направлении
наводится динамикой усиления свингом.

Аналитическое решение для $\hat{u}_z|_{t=0} = 0$, $(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{t=0} = 1$, $k_x \gg 1$ и $t \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}_z \rightarrow \text{sgn}(q) \pi k_z |k_x| \frac{2 - q}{q} \quad (\hat{u}_x, \hat{u}_y \rightarrow 0).$$

$$g_{\max} \equiv \max\{\hat{u}_z^2\} \approx \pi^2 k_{z \max}^2(q, R) k_{x \max}^2(q, R) \left(\frac{2 - q}{q}\right)^2, \text{ где}$$

$$k_{z \max} \approx 2^{-5/8} \pi^{-3/8} |q|^{7/8} (2 - q)^{-3/8} R^{-1/8}$$

$k_y = 1, k_z \ll 1$ (только здесь $R \rightarrow \infty$):

Система уравнений расщепляется

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{u}_x}{dt} &= -2 \frac{k_z}{k^2 + k_z^2} \hat{\omega}_x - 2q \frac{\tilde{k}_x}{k^2 + k_z^2} \hat{u}_x, \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{dt} &= (2 - q) k_z \hat{u}_x.\end{aligned}$$

Ускорение жидкости в вертикальном направлении наводится динамикой усиления свингом.

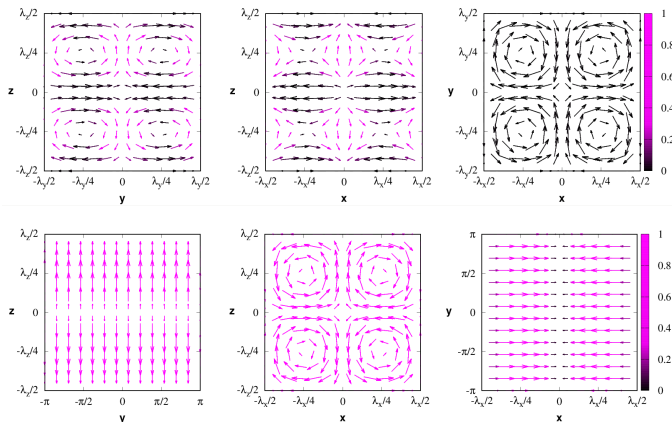
Аналитическое решение для $\hat{u}_z|_{t=0} = 0$, $(\hat{u}_x^2 + \hat{u}_y^2)|_{t=0} = 1$, $k_x \gg 1$ и $t \rightarrow \infty$:

$$\hat{u}_z \rightarrow \text{sgn}(q) \pi k_z |k_x| \frac{2 - q}{q} \quad (\hat{u}_x, \hat{u}_y \rightarrow 0).$$

$$g_{\max} \equiv \max\{\hat{u}_z^2\} \approx \pi^2 k_z^2 \max(q, R) k_x^2 \max(q, R) \left(\frac{2 - q}{q}\right)^2, \text{ где}$$

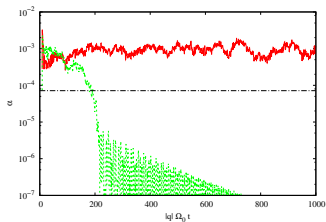
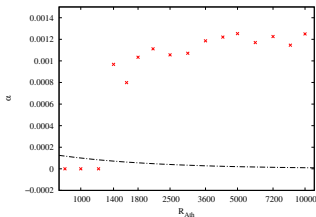
$$k_z \max \approx 2^{-5/8} \pi^{-3/8} |q|^{7/8} (2 - q)^{-3/8} R^{-1/8} : \quad k_z \max(q = -4) \lesssim 1/2$$

Сверху: кросс-роллы. Снизу: роллы (*anti-lift-up*)



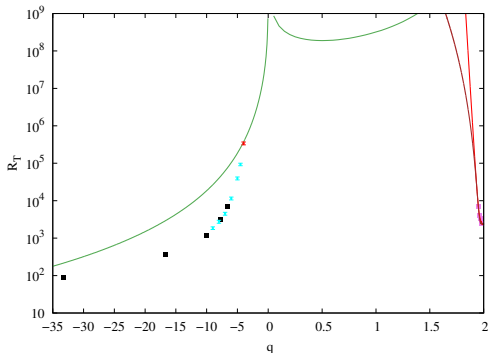
Получение числа Рейнольдса $R = R_T$ докритического перехода к турбулентности.

- $q = -10$.
- **Кубическая** счетная область $L_x = L_y = L_z = c_s/(|q|\Omega_0)$ и $R_{ATH} \equiv \Omega_0 L_y^2/\nu$.
- Зеленая кривая $R = 1200$; красная кривая $R = 1400$ ($\sim +20\%$) $\Rightarrow$ оценка $R_T = 1300$.



- 1) Произведено кодом ATHENA на кластере “Ломоносов” в МГУ.
- 2) Разрешение 128^3 .
- 3) Постановка расчета аналогично Lesur & Longaretti (2005).
- 4) α - эффективное вязкое напряжение в единицах давления.
- 5) Штрих-пунктирная линия соответствует $\alpha = \nu r \Omega' / c_s^2$.

Сравнение с линейным аналитическим решением: кубическая счетная область.



- Голубые точки - численный эксперимент.
- Зеленая кривая - постоянный фактор роста кросс-роллов $g = \text{const}$,
- фитированный по экспериментальной точке $R_T = 370000$ для $q = -4$.

Плохое соответствие

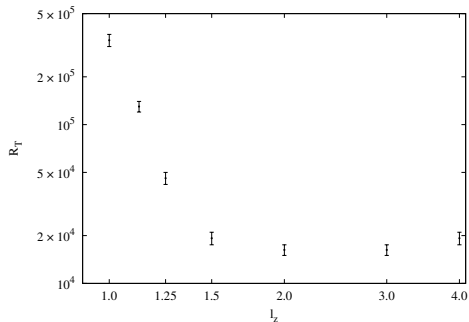
Вытягиваем ящик вдоль оси вращения.

1) $q = -4$.

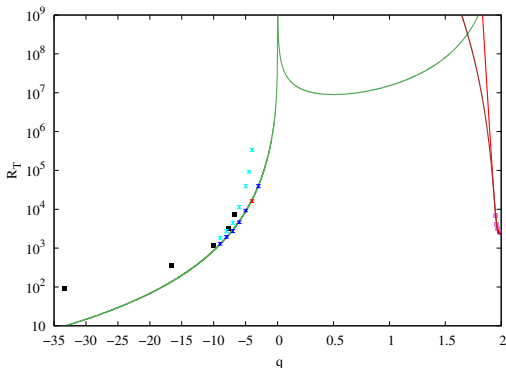
2) $l_z \equiv L_z/L_y$, $L_x = L_y$.

3) $R_T(l_z = 1) = 370000$.

4) $R_T(l_z = 2) = 15000$.



Сравнение с линейным аналитическим решением: **вытянутая** счетная область.



- Синие точки - численный эксперимент.
- Зеленая кривая - постоянный фактор роста кросс-роллов $g = \text{const}$, фитированный по экспериментальной точке $R_T = 15000$ для $q = -4$ в вытянутом ящике.
- Пороговое значение фактора роста кросс-роллов ~ 180 .

Хорошее соответствие

- Квази-двумерные сдвиговые вихри порождают вторичные вихри, ориентированные вдоль сдвига скорости общего потока, которые мы называем “кросс-роллами”.
- Кросс-роллы - единственные существенно трехмерные вихри высокой амплитуды, которые могут образовываться за счет транзитного роста возмущений во всем диапазоне центробежно устойчивых вращательных сдвиговых потоков $-\infty < q < 2$.
- Мы предполагаем, что кросс-роллы ответственны за докритический переход к турбулентности в этих потоках, поскольку:
- Для $-q \sim 1$ вытягивание счетной области вдоль оси вращения потока существенно ускоряет возникновение докритической турбулентности.
- Гидродинамическое моделирование турбулентности в такой счетной области дает хорошее соответствие $R_T(q)$ пороговому фактору роста кросс-роллов ~ 180 .

- Подавление линейного роста кросс-роллов в направлении линии Рэлея, $g \sim (2 - q)^2/q^2$, естественным образом объясняет асимметрию в усилении нелинейной устойчивости потока при отклонении от плоско-параллельного случая, $q = -\infty$, и от линии Рэлея, $q = 2$.
- По нашей оценке, наименьшее $R_T \sim 10^7$ в квази-кеплеровском режиме должно достигаться при суб-кеплеровском сдвиге скорости $q \approx 1/2$.
- Если это подтвердится, для кеплеровского сдвига скорости $R_T \sim 10^8$.

Спасибо!