Логарифмический потенциал гравитационного поля шварцшильдовской черной дыры

Николай Шакура[1,2], Галина Липунова[1]

[1] *ГАИШ МГУ* [2] *КГУ*

Для приближенного описания движения частиц вблизи ЧД обычно используются псевдо-ньютоновские потенциалы. Мы рассматриваем логарифмический потенциал и предлагаем метод его использования, дающий точное решение уравнения движения частиц (см. подробнее MNRAS 2018, **480**, 4273).

Логарифмический потенциал был введен Ландау и Лившицем (“Теория поля”, § 88), Торном и др. (“Мембранная парадигма”, IIA) для записи гравитационной силы, действующей на частицу вблизи черной дыры:

$$\Phi = \frac{c^2}{2}\ln\left(1-\frac{R_g}{r}\right) = c^2 \ln\sqrt{1-\frac{R_g}{r}}\,. \qquad (1)$$

Базовые положения

СО — система отсчета
ОПН — опорный наблюдатель
ISCO — последняя круговая устойчивая орбита

Интервал между двумя событиями в шварцшильдовской метрике

$$ds^2 = -(1-R_g/r)\,dt^2 + (1-R_g/r)^{-1}\,dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi)\,.$$

Из-за кривизны пространства-времени, радиальный элемент расстояния $\mathrm{d}l$, измеряемый ОПН, удлиняется:

$$\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-R_g/r}}\,.$$

“Функция замедления” $\sqrt{1-R_g/r}$ определяет красное смещение сигнала, излученного рядом с ЧД, и отношение двух интервалов времени, один из которых, $\mathrm{d}t$, измеряется на ∞, а другой — измеряется ОПН, $\mathrm{d}\tau_l$:

$$\mathrm{d}\tau_l/\mathrm{d}t = \sqrt{1-R_g/r}\,. \qquad (2)$$

Время, измеряемое в СО движущейся частицы, связано со временем, измеряемым ОПН, как:

$$\mathrm{d}\tau_p/\mathrm{d}\tau_l = \sqrt{1-v^2/c^2}\,. \qquad (3)$$

Импульс, энергия и момент импульса релятивистской частицы с массой покоя m_o, измеренные относительно ОПН:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_o\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,,\qquad E_{\rm local} = \frac{m_o\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,,\qquad h_p = \frac{m_o\,v_\varphi\,r}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \qquad (4)$$

Уравнение движения

Запишем уравнение движения частицы в СО ОПН с использованием потенциала, но в *искривленной* метрике:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau_l} = -\frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\nabla\Phi\,. \qquad (5)$$

Путем алгебраических преобразований (см. Шакура-Липунова 2018), можно получить, что для свободно движущейся частицы не меняется величина

$$E = \frac{m_o\,c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{1-\frac{R_g}{r}} = E_{\rm local}\sqrt{1-\frac{R_g}{r}} = const\,. \qquad (6)$$

— ’энергия-на-бесконечности’ (Торн и др.); в ОТО ей соответствует временная компонента 4-вектора импульса.

В нерелятивистском приближении энергия E_N имеет знакомый вид

$$E - m_o\,c^2 \equiv E_N = m_o\,v^2/2 - m_o\,G\,M/r\,. \qquad (7)$$

Благодарим программу развития МГУ "Выдающиеся научные школы МГУ: Физика звезд, релятивистских компактных объектов и галактик"

Энергия связи

Подставляя в (6) скорость $v_\varphi = c/2$, которую имеет частица на ISCO, получим энергию частицы на ISCO, в точности совпадающую со значением, получаемым в ОТО.

Таблица: Сравнение нормированной энергия связи частицы на ISCO для различных гравпотенциалов

	$(m_0\,c^2 - E)/(m_0\,c^2)$
Ньютоновский потенциал	$1/12 = 0.08(3)$
Потенциал Пачинского-Виты	$1/16 = 0.0625$
Логарифмический потенциал как псевдо-ньютоновский потенциал	0.096
Логарифмический потенциал в шварцшильдовской метрике	$1 - 2\sqrt{2}/3 \approx 0.0572$

Закон движения частицы

Используя (3), (4), (6) и $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$, получим

$$\frac{v_r^2}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau_p}\right)^2\frac{m_o^2\,c^4}{E^2}\,,$$

Далее можно получить закон движения частицы с энергией E в виде, идентичном точному решению ОТО (см. Шапиро-Тьюколски 1983):

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau_p}\right)^2 = \frac{E^2}{m_o^2\,c^4} - \left(\frac{h_p^2}{r^2\,m_o^2\,c^2}+1\right)\left(1-\frac{R_g}{r}\right).$$

Релятивистское уравнение Бернулли

Шакура и Липунова (2018) получили из уравнения Эйлера, записанного в релятивистской форме, что в метрике шварцшильда вдоль линии тока сохраняется величина

$$m_o\,c^2\,\omega\gamma\left(1-\frac{R_g}{r}\right)^{1/2} = m_o\,c^2\,\omega\,\frac{\left(1-\frac{R_g}{r}\right)^{1/2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = const\,,$$

где $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$, ω — удельная безразмерная энтальпия в расчете на одну частицу. При $v \ll c$, имеем $\omega = 1 + \frac{\omega_{\rm NR}}{c^2}$, где $\omega_{\rm NR}$ — нерелятивистская энтальпия. Для идеального газа

$$\omega_{\rm NR} = \frac{n}{n+1}\frac{P}{\rho}\,,$$

где n — показатель адиабаты ($P \propto \rho^n$).